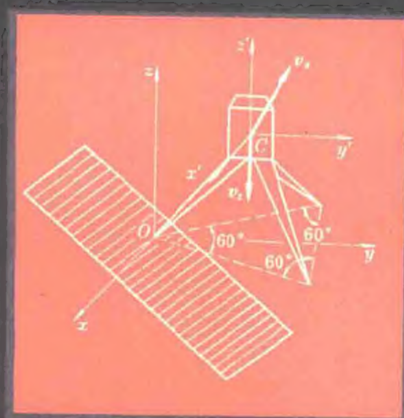
理论力学教学参考丛书

分析力学

浙江大学 汪家訸 编

高等教育出版社

理论力学教学参考丛书

分析力学

浙江大学　汪家訸　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是《理论力学教学参考丛书》的一册。

《理论力学教学参考丛书》是为了满足高等学校工科理论力学课程的教学需要而编写的，结合理论力学教材中的某些专题或内容加深加宽，作了进一步的阐述。这套教学参考丛书可作为理论力学教材的补充，供有关专业的大学生、研究生和教师在教学中参考选用。

本书内容包括：分析力学的基本概念和基本原理、分析力学的基本方程、力学的变分原理、对于求解动力学方程有关的分析力学知识和附录等。书末并附有习题。

本书由西安矿业学院钟奉俄同志、清华大学万嘉镇同志审阅，并由北京航空学院黄克累同志复审。

理论力学教学参考丛书

分 析 力 学

浙江大学 汪家訸 编

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
崇明大同红卫印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张8.375字数203,000
1982年9月第1版 1983年11月第1次印刷
印数 00,001—14,300
书号 15010·0454 定价 1.30 元

序

用典型的例题来说明分析力学的各原则的用法，是能够帮助我们理解和掌握这些原则的。由此可以训练我们如何使用这些原则，来解决科学和工程上有关的力学问题。作者在编写本书时尽可能在这方面作了努力。但限于篇幅，这种尝试只表现在前二篇。为了使读者多看到一些例题，除了是既典型又重要的例题，本书所选例题尽可能不与以往国内有关的力学书中的例题重复。

以前作者所编的《分析动力学》，在导出了一个力学问题的动力学方程以后，认为已经化成数学问题，往往不再继续求解了。这次采取了不同的方式，不但继续求解，而且进行了适当的讨论。

本书涉及的理论力学中非有关分析力学的知识，如果读者需要，可以参看其它有关的书籍。此外，除了分析力学的基本理论以外，作者不再重复其它书中有关分析力学的内容，以让这些书继续挥发它们的作用。

限于编者水平，错漏之处请读者指正。

汪家訸

一九八〇年七月

目　录

第 三 篇

力学的变分原理

第 四 篇

对于求解动力学方程有关的分析力学知识

绪 论

一、分析力学研究的对象

分析力学研究的对象是质点系力学。质点的个数 n 可以是任何正整数，自 $n=1$ 到 $n=\infty$。所以分析力学研究的对象也包括质点力学和刚体力学。例如，导弹的飞行路线，人造卫星的运行，月球探测器的飞往月球等问题，属于质点动力学的范围，需要用分析力学作为基础进行研究。又如回转仪的运动，属于刚体定点旋转和刚体群的运动，也需要用分析力学进行研究。近代把分析力学的研究方法扩充到研究流体力学和固体力学，而形成连续介质分析力学。

分析力学的方法也可用于电动力学、统计力学和相对力学的研究。虽然分析力学属于古典力学的范畴，但是它在早期原子物理学中的应用有它光辉的历史。例如卢瑟福(Rutherford)用 α 射线冲击金属片的散射理论确定了原子核的存在和原子序数。又如索末菲(Sommerfield)用分析力学的理论扩充了玻尔(Bohr)的氢原子模型到椭圆轨道，为以后用量子力学研究光谱理论和原子构造开辟了道路。就是对量子力学的内容而言，也需要有分析力学的基本知识才容易理解。例如薛定谔 (Schrödinger) 波动方程就是应用分析力学的哈密顿(Hamilton)-雅科毕(Jacobi)方程，以算符代换而得到的。

对于工程上的力学问题，分析力学的方法是解题的重要的基础工具，缺少了分析力学的知识，对于复杂和困难的力学问题将无法处理。

二、分析力学的研究任务

分析力学虽然是一门成熟的经典科学，可是还没有统一的涵

义，与理论力学的界线和分工也不明确。国内以前出版的理论力学，有的附有部分分析力学的内容，但是内容较少，也不深入。限于篇幅，本书也只能把分析力学的主要内容，作一扼要的介绍。

对于介绍如力、动量、动能等各力学量的物理概念，这是理论力学的任务，读者早已掌握这方面的知识，因而不再重复。

分析力学的正式创立，可以从1788年拉格朗日(Lagrange)出版的《分析力学》(Mécanique Analytique)开始。他引进了广义坐标的概念，得到了力学上最重要的动力学方程。随后1834年哈密顿引入了广义动量的概念，建立了另一套形式完整的力学系统的方程——正则方程(Canonic equation)。

完整系统和非完整系统的区别是无线电波的发现者赫兹(Hertz)在1894年首先提出的。适用于非完整系统的动力学方程是吉普斯(Gibbs)首先在1879年得到的，不过在当时力学界尚不理解他的研究的重要性。1896年阿佩尔(Appell)在他的著作《理性力学》(Me'canique rationnelle)中重新得出了这个方程，随后他自己发现这个方程存在严重错误，在1904年再版时他改正了这些错误。这种动力学方程应该称为吉普斯-阿佩尔方程，但大多数分析力学书上称为阿佩尔方程。

1834年哈密顿得到了以偏微分方程形式出现的动力学方程，不过这个方程能应用于求解动力学问题的完整理论是1837年雅科毕得到的，因此合称哈密顿-雅科毕方程。

建立求解动力学问题的动力学方程是分析力学的首要任务，本书第二编集中讨论各种动力学方程的建立问题，并以典型的例题说明它们的应用。

本书第三编的内容是力学的变分原理的讨论，例如哈密顿原理、高斯(Gauss)最小约束原理、赫兹最小曲率原理等。

动力学方程建立以后，接着就是求解动力学方程的问题，或寻

求与求解动力学方程这个目标靠近的一切有关理论。例如:

(1) 探求可以施行分离变量法的动力学方程应该具有的数学形式;

(2) 寻找一个动力学方程的运动积分,以便利用它来降阶;

(3) 研究变换理论,以将动力学方程变换成易于求解的新动力学方程;

(4) 寻求变换的不变式,这种不变式有助于研究力学系统的运动性质。

本书内容的安排,有优点,也有缺点。优点是对分析力学中最主要的内容分工相当明确,缺点是叙述的逻辑顺序较难安排,各种理论之间的相互联系减弱。

对于适用于同一个力学系统的力学原则和方程必然是可以相互推导的。例如由适用于保守系统的哈密顿变分原理可以导出拉格朗日方程,反之,也可以由拉格朗日方程导出哈密顿变分原理。本书只取其引出的一种,以节省篇幅。同样,对于同一个力学系统的运动积分,当然也一定可以由它所适用的各种方程导出。例如能量积分、广义动量积分,既可以由拉格朗日方程导出,也可以由哈密顿方程导出。本书也只取其一。

分析力学的基本方法和原则对于研究刚体力学、振动理论、运动稳定性理论、回转仪和天体力学等是必需的基本知识,这些专题的研究反过来又丰富了分析力学的内容,本书对这些专题只作为例题附带地讲到一些,详细的内容另有专书讨论。

力学中的定理是对于某种力学系统在某种条件下可从定律用逻辑推导的自然规律,如果在讨论分析力学的原则时需要的话将顺便提出,但不作为主要内容列入。

第一篇　分析力学的基本概念和基本原理

第一章　分析力学的一些基本概念

§1-1　自由系统和非自由系统·约束及其分类

质点系可分为自由系统和非自由系统。例如太阳系中各星体，恒星系，大气中的气体等都是自由系统。各种机器的机件，建筑物的梁和柱等物体都有其它物体在它的周围限制它的运动，这种限制称为约束（Constraint），被约束着的力学系统称为非自由系统。

对于刚体来说，它的内部各点也可看成有相互约束，使任何两点间的距离保持不变，这是使刚体在受力和运动过程中保持形状和大小不变的基本条件。

力学系统的约束是通过约束力来起作用的。约束力都是未知力，这些约束力只有当被研究的力学系统的运动情况掌握以后，才能进一步求出它们的大小。非自由系统的牛顿运动方程既然包含了未知的约束力，这样，这些约束力似乎使我们陷入了困境。但是，有不少约束往往可用简单的数学方程来描述。这样的方程称为约束方程。有了这些方程我们就能解脱未知约束力所造成的困难。关于约束方程的建立，可举例如下：

（1）一个质量为m的质点，用长为l、质量可略去的细刚杆铰

接于 O 点，如图 1-1 所示。这时质点的约束方程可写为

$$x^2+y^2+z^2=l^2 \tag{a}$$

如果将刚杆改为柔软的细绳，则约束方程可写为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant l^2 \tag{b}$$

对于前者，质点既不能进入半径为 l 的球内，又不能脱离球面而外出，所以称为双面约束。对于后者，质点虽然不能脱离半径为 l 的球面外出，但允许质点进入球内，所以质点只受到单方面的约束，称为单面约束。当我们求解力学问题的时候，需要的是约束方程，而不是不等式。当质点所受到的约束虽然是单面的，但是当它仍保留在这约束面上的时候，其约束方程仍可用式(a)表示。如果质点已脱离约束面，那时质点的运动已经与这种约束没有关系，而这个约束方程可以放弃不用。所以今后应用约束方程时不再对这两种情况加以区别，不过要注意将脱离的临界位置。

属于用细线悬挂质点的力学问题如单摆和证明地球自转的傅科(Foucault)摆。

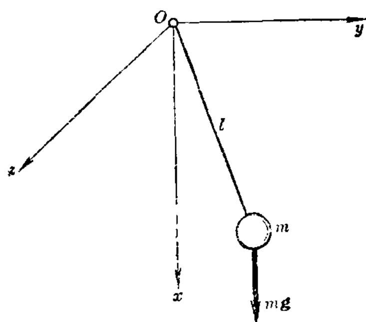


图 1-1

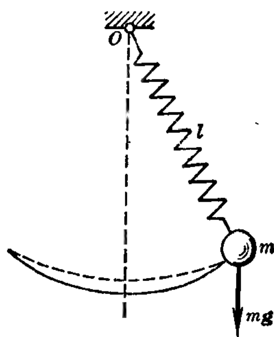


图 1-2

如果将细线换成质量与 m 相比为可略的弹簧，其弹簧常数为 k，如图 1-2 所示。那么，我们无法写出如式(a)那样的约束方程。这样，力学问题就复杂得多了。

(2) 质量为 m_1 和 m_2 的两个质点，以长为 l、质量为可略的刚

性直杆连接，如图 1-3 所示。约束方程可写为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2 \tag{c}$$

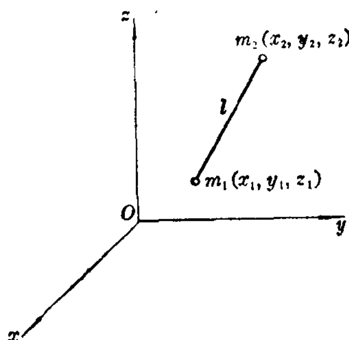


图 1-3

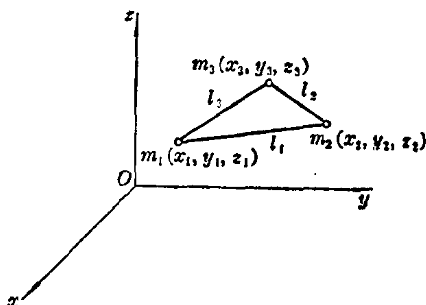


图 1-4

(3) 质量为 m_1、m_2 和 m_3 的三个质点，以长为 l_1、l_2 和 l_3 的三根细刚杆连接，如图 1-4 所示。约束方程为:

$$\left.\begin{aligned}(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l_1^2\\(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2=l_2^2\\(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2=l_3^2\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

(4) 质点 m 约束在光滑曲面上，曲面方程为

$$\varphi(x, y, z)=0 \tag{e}$$

则上式就是约束方程。

以上各约束方程都是质点坐标的函数，属于下列类型:

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots; x_n, y_n, z_n)=0 \tag{1-1a}$$

其中 x_1、y_1、z_1; x_2、y_2、z_2, …, x_n、y_n、z_n 分别为质点 m_1、m_2、…、m_n 的坐标①。为了简便起见，现在改用统一符号 x 来表示。将 x_1、y_1、z_1, x_2、y_2、z_2, …, x_n、y_n、z_n 改写为 x_1、x_2、x_3, x_4、x_5、x_6, … x_{3n-2}、x_{3n-1}、x_{3n}, 这样式(1-1a)可改写为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_{3n})=0 \tag{1-1b}$$

① 以后在本书中，n 表示质点系的质点个数。

如把 x_1、x_2、…、x_{3n} 看成为 $3n$ 维空间的矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量，则上式又可简写为

$$f(\boldsymbol{x})=0 \tag{1-1c}$$

属于式(1-1)类型的约束称为几何约束(Geometric constraint)。

有些力学问题的约束方程除了包含质点的坐标以外，还明显地包含时间 t，这样的约束方程可写为

$$f(t, x_1, x_2, \cdots, x_{3n})=0 \tag{1-2a}$$

或

$$f(t, \boldsymbol{x})=0 \tag{1-2b}$$

例如约束曲面在空间运动，或约束面随时间 t 而发生变化，都属于这种约束。这种含时间的几何约束称为含时几何约束或可简称为含时约束(Time dependent constraint)。几何约束是含时几何约束的特殊情况，因此今后只提含时约束时，就意味着也可以包含若干几何约束，甚至全部都是几何约束时的结论也必成立。

(5) 在等速运动中的火车里的倾斜桌面上放置的质点，其相对于固定于地面的坐标系的约束方程可写为

$$Ax+By+Cz+Dt+E=0$$

其中 A、B、C、D 和 E 都是常量，D 的量纲与速度相同，与 A、B、C 等不同，上式就是约束面运动的类型。

(6) 一个质点约束在膨胀着的气球上，这时气球的半径 R 为时间 t 的函数，可写成 $R(t)$，则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=R(t)^2$$

应该认识到这些约束方程必须在求解运动微分方程以前就能够写出来，约束方程本身不受被约束物体运动的影响。

设有一小三棱柱 A 放在光滑的大三棱柱 B 上，而大三棱柱又放在光滑的水平面上，如图 1-5 所示。此时 A 受重力作用而下滑时，必然推动 B 向反方向运动。B 的运动受 A 的影响。在这种

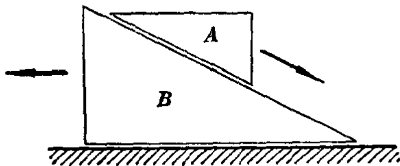


图 1-5

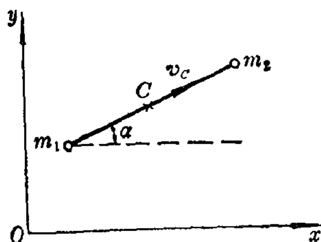


图 1-6

情况下，大三棱柱B的运动，其约束不能作为含时约束来处理。

(7) 两质点以刚性杆连接，杆长为l，在(x, y)平面内运动，约束条件是杆的中点速度始终沿杆向，如图 1-6 所示。几何约束方程有三个如下：

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

中点C的坐标为$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$，所以中点$C$的速度$v_c$的分量可写为$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}, \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}$。因中点速度的方向角为 tgα，故有约束方程

$$\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{\dot{x}_1 + \dot{x}_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

或

$$(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(x_1 - x_2) = (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_1 - y_2) \tag{1-3a}$$

上面的约束方程包含质点的速度，因此称为运动约束(Kinematic constraint)。因式(1-3a)可改写为

$$(dy_1 + dy_2)(x_2 - x_1) = (dx_1 + dx_2)(y_2 - y_1) \tag{1-3b}$$

所以又称微分约束(Differential constraint)。

一般运动约束可写为

$$f(t, x, \dot{x}) = 0 \tag{1-4}$$

从式(1-3)可看出，我们无法将它单独积分出来。以后我们将讨论这个例题如何与动力学方程联合求解的问题。象式(1-3)那样包含速度而又不能积分的约束，称为非完整约束(Nonholonomic constraint)。当它能不依赖动力学方程而可以单独积分成含时约束或几何约束时，称为完整约束(Holonomic constraint)。

§1-2 广义坐标和自由度

1. 自由系统

如果我们研究的是自由系统，每一个质点在空间的位置由(x, y, z)三个坐标来决定，那么n个质点的自由系统，需要$3n$个坐标来描述。如果不利用由运动微分方程得到的积分——动量积分、动量矩积分、能量积分和质心运动定理等，那么我们无法减少这$3n$个独立变数。

现在设这$N(=3n)$个变数x_1、x_2、…、x_N可用任何其它N个独立变数q_1、q_2、…、q_N来表示：

$$x_i = f_i(q_1、q_2、\cdots、q_N) \qquad (i = 1、2、\cdots、N) \tag{1-5}$$

由于这个力学系统是自由系统，N个x_i之间必须不能有任何关系存在，因此这N个函数f_i是相互独立的，也不能存在任何关系。在数学上要求下面的雅科毕式不为0：

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_N)}{\partial(q_1, q_2, \cdots, q_N)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_N} & \frac{\partial x_2}{\partial q_N} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_N} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1-6}$$

上式是N个变量q_1、q_2、…、q_N不存在任何关系的充要条件。我们

称这种独立变数q_1、q_2、…、q_N为广义坐标(Generalized coordinates)，个数N称为自由度(Degrees of freedom)。显然n个质点的自由系统，其自由度为$3n$。

一个自由质点m在空间直角坐标表示为x_1、x_2、x_3(即x、y、z)；也可以用球坐标r、θ、φ来表示，如图1-7所示。它们之间的关系为:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=r\cos\theta\cos\varphi \\ x_2&=r\cos\theta\sin\varphi \\ x_3&=r\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

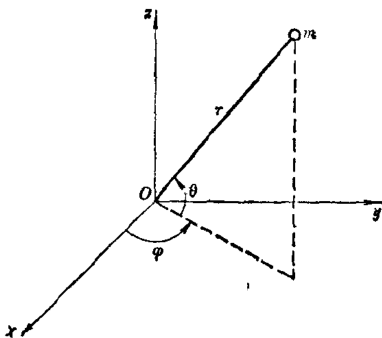


图 1-7

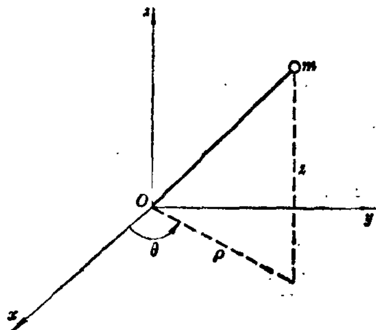


图 1-8

又一质点m在空间的坐标也可以用圆柱坐标ρ、θ、z来表示，如图1-8所示，则:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\rho\cos\theta \\ x_2&=\rho\sin\theta \\ x_3&=z. \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

显然

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \theta, z)}=\left\{\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}=\rho$$

除非$\rho=0$(即原点)，其它各处雅科毕式都不为0，所以ρ, θ, φ是各自独立的。一个自由质点的x_1、x_2、x_3或r、θ、φ或ρ、θ、z都可作为广义坐标。

习题 1-1 试算出式(1-7)的雅科毕式。

2. 非自由系统

非自由系统是质点系有了约束，各质点之间的坐标有约束方程联系着。因此如果质点系含有 n 个质点和 k 个几何约束，那么描述这个系统的独立变数的个数，亦即广义坐标的个数便减少为 $3n-k$ 个。因此自由度 $N=3n-k$。

(1) 例如一质点约束在平面上，我们以此平面为(x,y)平面，那么自由度为 2，广义坐标为 x, y。

(2) 设一质点约束在球面上，那么我们用球面坐标 θ, φ 为广义坐标，r 为常量，可以不考虑，所以自由度亦为 2。例如海洋中的船只如不考虑它的颠簸，我们研究它的运动时，就只要用经度 θ 和纬度 φ 来表示。

(3) §1-1 的(2)中，两个质点有 6 个坐标$(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$，由约束方程(1-3)联系着，所以自由度$N=3\times2-1=5$。我们可以选 x_1, y_1, z_1 及以质点 1 的位置为原点的球坐标 θ, φ 为独立变量，此时 $l=r$ 为常量，$(x_1, y_1, z_1; \theta, \varphi)$ 可作为广义坐标。

(4) 例1-3 中，三个质点有 9 个坐标 $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3)$，而有三个约束方程，所以自由度 $N=3\times3-3=6$。如果有四个质点，其中三个质点用三根刚性杆连接如前。对第四个质点 $m_4(x_4, y_4, z_4)$ 用长度为 l_4、l_5、l_6 的三根刚性杆与前三个质点连接，如图 1-9 所示。此时 $n=4$，所以自由度 $N=3\times4-6=6$，也是 6 个自由度。如再添第五个质点 m_5，坐标增加 3 个(x_5, y_5, z_5)，连接杆也增加 3 根，自由度仍是 6。仿此增多，无论是几个质点，自由度都是 6 个。由此可见，一个刚体的自由度为 6。

我们研究刚体运动时所需用的 6 个广义坐标，可选刚体质心 C 的坐标(x_C, y_C, z_C)和三个欧拉(Euler)角 ψ、φ、θ，如图 1-10 所示。这三个角坐标的定义如下:

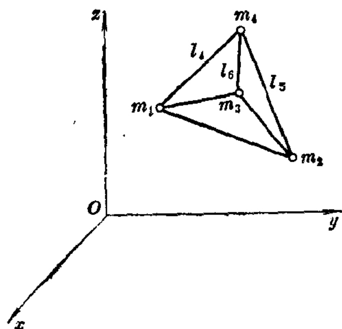


图 1-9

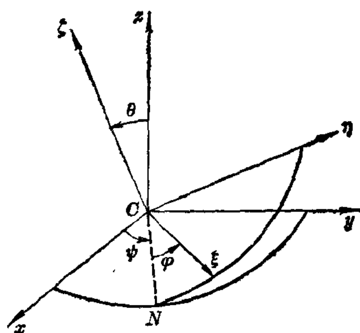


图 1-10

以质心C为原点，作直角坐标系$Cxyz$，它的三个坐标轴x、y、z在惯性空间的指向不变；作$C\xi\eta\zeta$为固定于刚体的直角坐标系；坐标平面(ξ,η)与(x,y)的交线CN称为节线，则θ、ψ、φ如图所示，即：

$$\theta=\angle\zeta Cz$$

$$\psi=\angle xCN$$

$$\varphi=\angle NC\xi$$

如果质点系的有些约束是含时约束，那么广义坐标的个数依旧是$N=3n-k$，其中k是几何约束个数与含时约束的个数的总和。关于非完整约束的自由度将在以后讨论。

从以上关于质点系自由度的讨论看出，对于质点个数为n的自由质点系它的自由度$N=3n$，N最大。非自由质点系由于有$3k$个约束方程，自由度$N=3n-k$便减少了。自由度是描述质点系运动状态的变数，因此有了约束方程不但不增加求解动力学问题的困难，反而有利于解题。关于如何应用约束方程，将在以后详细讨论。

对于自由质点系的降阶问题（自由度的减少）则可利用动力学的已知运动积分。例如一个质点在有心力作用下，这力对力心的

动量矩不变，因此质点运动的轨道面不变，于是质点的运动化为在平面内的运动，成为两个自由度的力学系统。

§1-3 可能位移和虚位移

设一个质点约束在曲面上，此曲面的方程为

$$\varphi(x, y, z)=0 \tag{1-9}$$

既然质点不再受其它约束，原则上质点运动的空间就是这整个曲面。当然质点还有主动力的作用，因而质点有一定的运动规律，只能沿一定的轨道运动。但是后者尚未明确以前，单就式(1-9)来讲，经过dt时间后质点位置有变动为dx、dy、dz，一定适合方程

$$\varphi(x+dx, y+dy, z+dz)=0 \tag{1-10}$$

将上式用泰勒(Taylor)级数展开，有

$$\varphi(x+dx, y+dy, z+dz)=\varphi(x, y, z)+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz+\cdots$$

略去高阶无穷小，并应用式(1-9)和(1-10)，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0 \tag{1-11}$$

这是质点无穷小位移$dr(dx, dy, dz)$约束在曲面(1-9)上的充要条件。由于尚未考虑到质点的运动规律，所以dx、dy、dz不一定是在真实运动中出现的位移。但是是约束方程(1-9)容许情况下可能出现的位移。所以我们称它为可能位移(Possible displacement)。将式(1-11)除以位移经过的时间dt得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\dot{z}=0 \tag{1-12}$$

这是质点可能速度$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$应适合的方程。

例如质点约束在球面上，则式(1-9)成为

$$\varphi=x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

式(1-11)成为

$$xdx+ydy+zdz=\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

上式表示质点的可能位移 $d\boldsymbol{r}$ 与半径 $\boldsymbol{r}$ 垂直，因此 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 也相互垂直。

当约束方程(1-9)和质点的坐标(x, y, z)确定以后，$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial y}$、$\frac{\partial\varphi}{\partial z}$就成为已知的定值了。此时式(1-12)表示质点的速度分量应满足的条件。但是现在速度方程只有一个，而速度分量却有三个，因此式(1-12)不能确定 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 的量值。

当曲面方程应用于实际问题时，总是一种近似的描述。所以虽然有了曲面方程，对实际问题还会引起有无摩擦的问题。现在分(1)曲面光滑，(2)曲面粗糙两种情况来讨论。

(1) 曲面光滑——此时曲面给质点的约束反力 $\boldsymbol{N}(N_x, N_y, N_z)$ 方向沿曲面的法线，即有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial z}=N_x:N_y:N_z$$

将上述关系式代入式(1-12)，得

$$N_x dx+N_y dy+N_z dz=\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r}=0 \tag{1-13}$$

所以光滑曲面加于被约束质点的约束力 $\boldsymbol{N}$ 对质点的可能位移 $d\boldsymbol{r}$ 不作功。这种约束力不作功的约束称为理想约束(Ideal constraint) 或称为不作功约束(Workless constraint)，如图 1-11 所示。

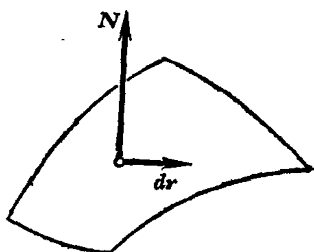


图 1-11

对于理想约束，曲面上的质点速度分量 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 除式(1-12)以外，尚有下列关系式:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+V(x, y, z)=E$$

其中E是质点的总机械能，是常量；$V(x,y,z)$是位函数。

(2) 曲面粗糙——质点在此曲面上运动时，受到与质点运动方向相反的摩擦力的作用，所以曲面对质点的总反力$\boldsymbol{N}$可以分解为$\boldsymbol{N}_\perp$和$\boldsymbol{N}_{/\!/}$两个分量。$\boldsymbol{N}_\perp$垂直于曲面；$\boldsymbol{N}_{/\!/}$沿曲面的切平面，$\boldsymbol{N}_{/\!/}$即摩擦力。于是由图 1-12 得

$$\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{N}_\perp\cdot d\boldsymbol{r}+\boldsymbol{N}_{/\!/}\cdot d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{N}_{/\!/}\cdot d\boldsymbol{r}\neq 0$$

因$\boldsymbol{N}_{/\!/}$与$d\boldsymbol{r}$方向相反，故摩擦力$\boldsymbol{N}_{/\!/}$对质点作负功。如果质点继续对曲面作相对运动，则质点的机械能将不断减少。

现在来研究例 1-2。对于此例，

$$\varphi=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

所以式(1-11)成为

$$(x_1-x_2)(dx_1-dx_2)+(y_1-y_2)(dy_1-dy_2)+$$
$$+(z_1-z_2)(dz_1-dz_2)=0$$

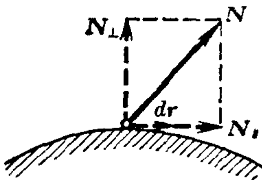


图 1-12



图 1-13

质点1所受的约束力$\boldsymbol{N}_1$和质点2所受的约束力$\boldsymbol{N}_2$，按作用和反作用定律有$-\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{N}_2$，方向沿杆的轴向，如图 1-13 所示。于是

$$\frac{N_{1x}}{x_1-x_2}=\frac{N_{1y}}{y_1-y_2}=\frac{N_{1z}}{z_1-z_2}$$

将上式代入前一式得

$$N_{1x}(dx_1-dx_2)+N_{1y}(dy_1-dy_2)+N_{1z}(dz_1-dz_2)=$$
$$=\boldsymbol{N}_1\cdot(d\boldsymbol{r}_1-d\boldsymbol{r}_2)=\boldsymbol{N}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{N}_2\cdot \boldsymbol{r}_2=0 \qquad (1\text{-}14)$$

上式表示以刚性杆连接的两个质点的约束力在两个质点运动中所

作的功之和为零。

应该注意，每一个约束力都是作功的。若一个约束力作正功，另一个一定作负功，使两者作功之和为零。

从此例可以理解到刚体内任何两点之间的约束力作功之和都为零。亦即无论刚体如何运动，刚体内约束力作功之和为零。这种约束力作功之和为零的约束是理想约束的又一形式。

对于变形体，内部约束力作功之和可以不为零。例如地球不是刚体，地震时地壳的部分发生位移，引起位能的突然减小，发出巨大的能量，造成地面房屋的严重破坏。

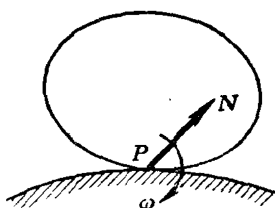


图 1-14

设有一刚体 A 在另一刚体 B 的表面上滚动而不滑动，如图 1-14 所示，那么约束反力恒通过接触点。现在接触点 P 的位移 $d\boldsymbol{r}_P=0$，所以 $\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r}_P=0$。这是具有摩擦力而仍属于理想约束之列。

现在来讨论含时约束

$$\varphi(t,x,y,z)=0 \tag{1-15}$$

经 dt 时间后，质点发生位移 dx、dy、dz，于是

$$\varphi(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)=0$$

用泰勒级数将上式展开，略去高次项，并应用式(1-15)得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz+\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt=0 \tag{1-16}$$

或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{1-17}$$

比较式(1-17)与(1-12)，式(1-12)是 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 的齐次式，而式(1-17)

不是 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 的齐次式。但两者在数学上都属于伐夫 (Pfaff) 型微分方程。这种型式的微分方程存在着解案的条件，参看附录 I。

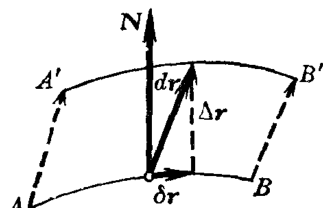


图 1-15

现在讨论图1-15曲面是光滑的情况。此时曲面对质点的约束力 N 依旧与曲面垂直，即有

$$\frac{N_x}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\frac{N_y}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=\frac{N_z}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}=\lambda \tag{1-18}$$

将上式代入式(1-17)，得

$$N_x dx+N_y dy+N_z dz=\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r}=-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial t}dt\neq 0 \tag{1-19}$$

所以在此情况下，约束力对质点可能位移所作的功不再为 0 。这是含时约束与几何约束的一个重要差别。

下面用图 1-15 来说明式 (1-19) 的物理意义。设曲面 AB 在dt 时间内运动到 $A'B'$，此时曲面上的质点对空间的位移为 $d\boldsymbol{r}$，相对于曲面的位移为 δr；曲面上与质点重合之点的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，则 $d\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$。但 $\delta\boldsymbol{r}$ 可看成为曲面不动时质点在曲面上的位移，我们从图中看出 $\delta\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 垂直，所以 $\boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{r}=0$。

$$\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{N}\cdot(\delta\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})=\boldsymbol{N}\cdot\Delta\boldsymbol{r}\neq 0$$

因为 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 的方向相同，其功不为 0。

由于 $\delta\boldsymbol{r}$ 是把曲面方程(1-15) 的时间停住不变时质点在曲面上的位移，此位移是想象的，因此我们称 $\delta\boldsymbol{r}$ 为虚位移 (Virtual displacement)。

对于虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$，我们可表示为

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta x\boldsymbol{i}+\delta y\boldsymbol{j}+\delta z\boldsymbol{k}$$

于是曲面对质点的约束力所作的功为

$$\boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{r}=N_x\delta x+N_y\delta y+N_z\delta z=0 \tag{1-20}$$

力对于虚位移 δr 所作的功称为虚功(Virtual work)。由式(1-20)可知，含时约束曲面对质点的约束力对于质点的虚位移所作的虚功为零。

将式(1-13)与(1-20)进行比较，我们看出：

对于几何约束，可能位移 dr 与虚位移 δr 两者特性相同，光滑曲面对质点的约束力经质点的可能位移或虚位移都不作功。

对于含时约束，可能位移 dr 与虚位移 δr 不同，约束力对可能位移所作的功不为0，而约束力对虚位移所作的功为零。

现在我们推广虚位移这个概念到一般含时约束

$$f(t, x)=0 \tag{1-21}$$

那么对于可能位移，有约束方程

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i+\frac{\partial f}{\partial t} dt=0 \tag{1-22}$$

对于虚位移的约束方程为

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i=0 \tag{1-23}$$

比较上面两式可知 δr 与 dr 两者不同。

对于几何约束，f 不含 t，所以式(1-22)变成

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i=0$$

于是 dr 又与 δr 相同。

虚位移 δr 的特性很象数学中的变分，因此采用与变分相同的符号。在分析力学中，一个力学量 x 随时间 t 和其它实参数 α_1、α_2、…、α_n 而变，即

$$x=x(t; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

那么 δx 表示由于非时间参数 α_1、α_2、…、α_n 的变更而引起的无限小变更，即

$$\delta x=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}\delta\alpha_j$$

如果时间也参与变化，那么用微分符号，而有

$$dx=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}d\alpha_j+\frac{\partial x}{\partial t}dt$$

关于变分符号 δ 与微分符号的可交换性，可参看附录II。

第二章　分析力学的两个基本原理

(一)虚位移原理

§2-1　理想约束和虚位移原理

我们从上节可以看到:(1)质点约束在光滑曲面上时，约束力对质点可能位移不作功;(2)两个质点以刚杆连接的两个约束力对两个质点所作的功之和为零;(3)刚体中质点之间的约束力不作功;(4)刚体在粗糙面上作纯滚动时,约束力也不作功;(5)两个刚体以光滑铰链相连接如图 2-1 所示，它们相互之间有约束力 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$,按作用和反作用定律,$\boldsymbol{N}_1=-\boldsymbol{N}_2$,若铰链有可能位移 $d\boldsymbol{r}$,那么也有

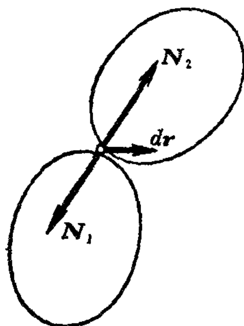


图　2-1

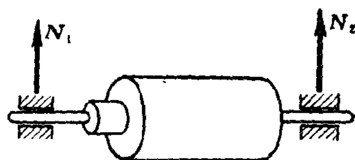


图　2-2

$$(\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2)\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

(6)放在光滑轴承上的轮轴系统,在支座上有轴承反力 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$,如图 2-2 所示,当轮轴转动时,$\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$ 也不作功。

总之，在工程实际中，由于采用润滑油和机械零件表面加工成所需要的光洁度等措施，约束力所作的功极为微小。为了先建立理想简单情况下的力学理论，我们定义：凡是一个质点系的所有约束力，对于各质点可能位移所作的功之和为0，其约束称为理想约束。即对于理想约束，有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i\cdot d\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2-1}$$

由于应用了上述条件，使我们处理约束系统的力学问题得到了简化。

如果系统中有含时约束，那么约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 对于 $d\boldsymbol{r}_i$ 是作功的。此时，由上节的启示，我们可用虚位移来代替可能位移。于是对于含时约束有

$$\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot\delta r_i=0 \tag{2-2}$$

由于 $f(t,\boldsymbol{r}_i)=0$ 是比 $f(\boldsymbol{r}_i)=0$ 更普遍的约束方程，为了建立更广泛的力学理论，我们再改用式(2-2)作为理想约束的定义。

现在开始应用理想约束来建立静力学中很重要的虚位移原理。

设有一质点系，它有 n 个质点 m_1、m_2、…、m_n，每一个质点 m_i 受有主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{N}_i$，当质点系平衡时，对每一个质点都有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

设想每一个质点离开其平衡位置作虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$，则有

$$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

对整个质点系则有

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2-3}$$

应用理想约束条件(1-25),上式变为

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{2-4}$$

式(2-4)也是质点系平衡的充分条件。现在采用反证法:已知式(2-4)成立,要证明原为平衡的质点系依旧保持平衡状态。

如果质点系不平衡,那么不平衡的质点 m_i 上就作用着一个力,此力是作用在质点 m_i 上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束力 $\boldsymbol{N}_i$ 的合力,即

$$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i\neq 0$$

因为质点系原为静止,质点 m_i 受力 $\boldsymbol{R}_i$ 作用自静止开始运动。以质点的实位移 $d\boldsymbol{r}_i$ 作为虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$(只对平稳系统才行),此时 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 的方向一定与$\boldsymbol{R}_i$ 的方向一致(见附录 III),故

$$\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0$$

对整个质点系就有

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0$$

应用式(2-2),上式成为

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i>0$$

此式与式(2-4)矛盾。这是由于假定 $\boldsymbol{R}_i\neq 0$ 引起的。所以必定$\boldsymbol{R}_i=0$,即

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

亦即原质点系依旧保持平衡状态。虚位移原理可叙述如下:具有

双面理想约束的平稳质点系统，在给定位置上平衡的充要条件是作用于质点系的所有主动力，在自此系统的给定位置上出发的任何虚位移上所作的元功之和等于零。

§2-2 虚位移原理在静力学中的应用

1. 求一个自由度机构的机械利益

设作用于一个自由度机构的主动力为 $\boldsymbol{P}$，从机构作用于外界的从动力为 $\boldsymbol{Q}$，在 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的作用点各有一虚位移 $\delta\boldsymbol{p}$ 和 $\delta\boldsymbol{q}$，则由虚位移原理有

$$\boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{p}+\boldsymbol{Q}\cdot\delta\boldsymbol{q}=0$$

或

$$P\delta p\cos\theta_p+Q\delta q\cos\theta_q=0 \tag{2-5a}$$

于是机械利益

$$A=\frac{Q}{P}=-\frac{\delta p\cos\theta_p}{\delta q\cos\theta_q} \tag{2-5b}$$

式中 θ_p 为 $\boldsymbol{P}$ 与 $\delta\boldsymbol{p}$ 之间的夹角，θ_q 为$\boldsymbol{Q}$与 $\delta\boldsymbol{q}$ 之间的夹角。

例 2-1 犁的后轮机构由两杠杆所组成，直杆 AB、曲杆 CD 各与固定铰链 O_1、O_2 和连杆 BC 相连接，如图 2-3 所示。此连杆与两杆所成之角各为 φ_1 和 φ_2。当机构在此位置时，A 比 O_1 高 h，D 与 O_2 之间的水平距离为 H。今

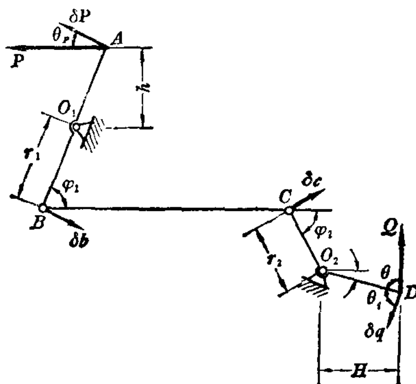


图 2-3

在 A 点作用一水平力 P，在 D 点作用一铅垂力 Q，且 $O_1B=r_1, O_2C=r_2$。求机械在平衡状态时的机械利益。

解：为了应用式(2-5)，要求出 θ_p 和 θ_q。从图上看出：$\theta_p=90°-\varphi_1$，$\theta_q=180°-\theta$。所以式(2-5)成为

$$P\delta p\sin\varphi_1=Q\delta q\cos\theta \tag{a}$$

下面找出 δp 与 δq 的关系式。由图有：

$$\delta p=\overline{O_1A}\delta\varphi_1,\qquad \delta b=r_1\delta\varphi_1\qquad \delta c=r_2\delta\theta,\qquad \delta q=\frac{H}{\cos\theta}\delta\theta$$

又 δb、δc 在 BC 上的投影必须相等，所以

$$\delta b\cos(90°-\varphi_1)=\delta c\cos(90°-\varphi_2)$$

于是

$$\delta p=\frac{\overline{O_1A}}{r_1}\delta b=\frac{\overline{O_1A}}{r_1}\frac{\cos(90°-\varphi_2)}{\cos(90°-\varphi_1)}\delta c=\frac{\overline{O_1A}\sin\varphi_2}{r_1\sin\varphi_1}r_2\delta\theta$$

$$=\frac{r_2\overline{O_1A}\sin\varphi_2}{r_1\sin\varphi_1}\frac{\cos\theta}{H}\delta q$$

又 $h=\overline{O_1A}\sin\varphi_1$，将以上两式代入式($a$)，得

$$A=\frac{Q}{P}=\frac{hr_2\sin\varphi_2}{Hr_1\sin\varphi_1}$$

2. 虚位移原理的扩大应用

虽然虚位移原理的特点是：1）需要约束类型为理想约束，2）约束力在虚位移方程中被消去，3）虚位移无需经过时间，4）应用于静力学。但是，我们可辩证灵活地应用这些概念，因而可以扩大虚位移原理的应用范围。现分述如下：

(1) 将摩擦力看作主动力，应用虚位移原理可以处理不是理想约束的力学问题。

虽然分析力学需要的是理想约束，但是也可以处理非理想约束的问题。我们将约束反力分解为垂直于曲面的约束力 $N_\perp$，和平行于曲面的约束力 $N_\parallel$，把后者不看作约束力而当作主动力，那么我们就可以求解有摩擦力的力学问题。

例 2-2 如图 2-4 所示，求螺旋压榨机的机械利益。螺纹是方形的，螺旋间的摩擦系数 $\mu=\text{tg}\varphi$。

解：设想施力杆 AB 两端作用着主动力 P，被压榨物体的反力为 Q，此

外尚有支架在 C 处给予螺旋的压缩力 N_1、N_2、…、N_n 和摩擦力 F_1、F_2、…、F_n。设想施力杆转动一微小角 $\delta\theta$，则 A、B 两点的虚位移 $\delta p=\frac{l}{2}\delta\theta$。螺距为 h，则 Q 点的虚位移 $\delta q=h\frac{\delta\theta}{2\pi}$。螺旋上压力 N_i 与螺旋斜面的位移垂直，所以是理想约束，可以不计。

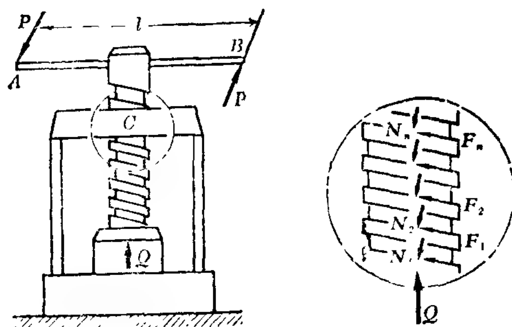


图 2-4

设螺旋间接触表面的平均半径为 r，则螺面摩擦力的虚位移为 $\frac{r\delta\theta}{\cos\alpha}$，其中 α 为螺面倾斜角。有关系式 $h=2\pi r\tan\alpha$，于是虚位移原理(2-4)可写为

$$2P\left(\frac{l}{2}\delta\theta\right)-Qh\frac{\delta\theta}{2\pi}-\Sigma F\frac{r\delta\theta}{\cos\alpha}=0 \tag{2-6}$$

但摩擦力 $\Sigma F=\mu\Sigma N$，如将螺杆所受的力投影于铅垂轴上，有

$$\Sigma F\sin\alpha-\Sigma N\cos\alpha+Q=0$$

于是

$$\Sigma F=\frac{\mu Q}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}$$

将上式代入式(2-6)并约去 $\delta\theta$，得

$$Pl-\frac{Qh}{2\pi}-\frac{r\mu Q}{\cos\alpha(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}=0$$

由上式解得

$$A=\frac{Q}{P}=\frac{l(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)}{r(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}$$

或用摩擦角 φ 表示，

$$A=\frac{l}{r}\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}=\frac{l}{r}\operatorname{ctg}(\alpha+\varphi)$$

(2) 想象解除某一约束后，此约束对力学系统的作用可用一约束力代替。把约束力当作从动力，就可以求出约束力。

虽然虚位移原理的优点在于可以把未知的约束力完全消去，但是我们也可以把约束一个一个地解除，并将约束力看成为从动力，从而把约束力一个一个地全部求解出来。

例 2-3 试用虚位移原理求图 2-5*a* 所示桁架在水平力 *P* 的作用下，杆件 *1*、*2*、*3* 的内力。

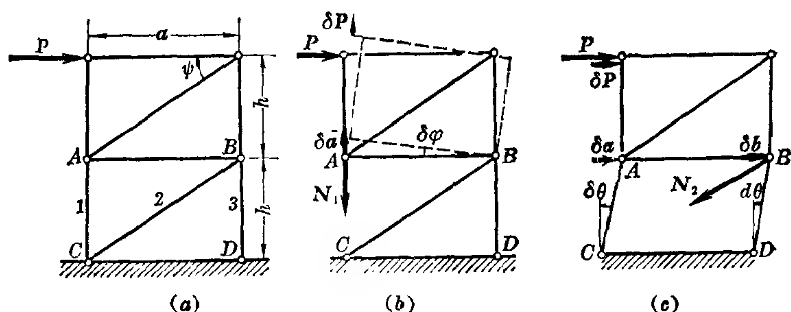


图 2-5

(1) 求杆 *1* 的内力

将杆 *1* 用约束力 N_1 代替，并将它看成为从动力，则上部桁架可以看成为绕铰链 *B* 转动，如图 2-5*b* 所示。设角位移为 $\delta\varphi$，于是

$$P\delta P-N_1\delta a=0$$

而 $\delta P=h\delta\varphi$, $\delta a=a\delta\varphi$

所以

$$N_1=\frac{P\delta P}{\delta a}=\frac{Ph}{a}$$

(2) 求杆 *2* 的内力

整个上部桁架可以看成有微小的平移，如图 2-5*c* 所示。*A*、*B* 两点各绕 *C*、*D* 两点转 $\delta\theta$ 角。因 $\delta P=\delta b=\delta a=h\delta\theta$，于是虚位移原理方程成为

$$P\delta P=N_2\cos\psi\delta a$$

故

$$N_2=\frac{P}{\cos\psi}=\frac{\sqrt{h^2+a^2}}{a}P$$

习题 2-1. 求上题杆 *3* 的内力。

(3) 虚速度原理在儒可夫斯基(Joukowsky)杠杆的应用。

我们提到虚位移是想象的，作此位移可以不经过时间，但也可以认为经过时间，这样将式(2-4)除以作位移所经过的对应时间 dt，得到

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{v}_i=0 \tag{2-7}$$

上式称为虚速度原理。

对于式(2-5)有

$$Pv_p\cos\theta_p+Qv_q\cos\theta_q=0 \tag{2-8}$$

把力 $\boldsymbol{P}$ 在 $\boldsymbol{v}_p$ 方向的投影 $P\cos\theta_p$ 记为 P'，力 $\boldsymbol{Q}$ 在 $\boldsymbol{v}_q$ 方向的投影 $Q\cos\theta_q$ 记为 $-Q'$，则自式(2-8)有

$$P':Q'=v_q:v_p \tag{2-9}$$

这反比关系就是"得之于力失之于速"的力学之金律。是伽利略(Galileo)首先在斜面中表述出来的，可说是虚位移原理的维形。

儒可夫斯基把式(2-7)看成为力矩关系式，为此必须把各 $\boldsymbol{v}_i$ 顺同一方向转 90° 角，这个方法的优点是可以发展成应用速度分析的图解法[参 1]。

例 2-4 讨论四连杆机构 $ABCD$。如图 2-6a 所示，在 AB 上作用一力

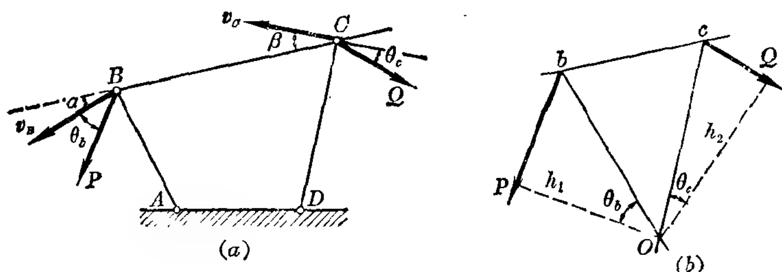


图 2-6

$\boldsymbol{P}$, 在 C 上作用着从动力 $\boldsymbol{Q}$, 它们的方向如图所示。B 和 C 点分别产生速度 $\boldsymbol{v}_B$ 和 $\boldsymbol{v}_C$, 则 $\boldsymbol{v}_B$、v_C 由速度投影定理联系着: $v_B\cos\alpha=v_C\cos\beta$。任取一点 O 为极点, 如图 2-6b 所示。作 $Ob\perp v_B$, $Oc\perp v_C$。因 $Ob\parallel AB$, $Oc\parallel Dc$。在 Ob 上任取一点 b 作 $bc\parallel Bc$, 与 Oc 交于 c。在 b 点和 c 点各作 $bP\parallel P$, $cQ\parallel Q$。自 O 作虚线 $h_1\perp P$, $h_2\perp Q$。则式(2-7)为

$$Pv_b\cos\theta_b=Qv_c\cos\theta_c$$

或

$$Ph_1=Qh_2$$

上式可以看成为力 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 对 O 点的力矩正好平衡。

(4) 最后, 虚位移原理只能应用于静力学的限制, 由于有了达朗伯(d'Alembert)原理, 能扩充到应用于动力学。分析动力学主要就是从事于这方面的研究。这里不再举例, 自第二篇开始就将讨论分析动力学。

§2-3 广义坐标的平衡方程·广义力

设有一 n 个质点的质点系, 它有 k 个含时约束,

$$f_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_{3n}; t)=0 \qquad (\alpha=1, 2, \cdots, k)$$

那么 $3n$ 个 x 坐标, 只有 $N=3n-k$ 个是独立的。我们可选出与这 $3n$ 个坐标有下列关系的 N 个广义坐标 q_1、q_2、$\cdots$、q_N:

$$x_\beta=x_\beta(q_1, q_2, \cdots, q_N; t) \qquad (\beta=1, 2, \cdots, 3n)$$

于是

$$\delta x_\beta=\sum_{\rho=1}^{N}\frac{\partial x_\beta}{\partial q_\rho}\delta q_\rho \tag{2-10}$$

又将对应于统一坐标 x_β 的主动力分量表示为 X_β, 则虚位移方程可写为

$$\sum_{\beta=1}^{3n}X_\beta\delta x_\beta=0$$

将式(2-10)代入上式得

$$\sum_{\beta=1}^{3n} X_\beta \sum_{\rho=1}^{N} \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\rho} \delta q_\rho = 0$$

即

$$\sum_{\rho=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{3n} X_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\rho} \delta q_\rho = 0$$

令

$$Q_\rho = \sum_{\beta=1}^{3n} \left(X_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\rho} \right)$$

则

$$\sum_{\rho=1}^{N} Q_\rho \delta q_\rho = 0 \tag{2-11}$$

但 δq_1、δq_2、…、δq_n是相互独立的，因此我们可令$\delta q_1 = 1$，$\delta q_2 = = \delta q_3 = \cdots = \delta q_N = 0$，则式(2-11)成为 $Q_1 = 0$。同样我们令$\delta q_1 = 0$，$\delta q_3 = \cdots \delta q_N = 0$，$\delta q_2 = 1$，则有 $Q_2 = 0$。这样继续下去，由式(2-11)可得

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \cdots, Q_N = 0 \tag{2-12}$$

我们称 Q_i 为对应于广义坐标 q_i 的广义力(Generalized force)。在应用广义坐标的情况下，质点系平衡的充要条件成为所有的广义力等于 0。要注意以上的推论是建立在各 q_i 相互独立的基础上的。对于不是相互独立的坐标，例如 δx_1、δx_2、…、δx_{3n} 就不能得出 $X_1 = 0$、$X_2 = 0$、…、$X_{3n} = 0$ 等结果。注意今后在分析力学中我们经常应用上述推导的逻辑。

例 2-5 如图 2-7 所示，两根长为 l_1 和 l_2 的均质杆 AB和 BC，用光滑铰链连接于 B。杆重 P_1 和 P_2。AB 杆一端 A 铰接于固定点 A。试求在C端作用一水平力 $\boldsymbol{F}$ 使之平衡时，两杆与铅垂线的夹角 α 和 β。

解：现在主动力有三个：$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{F}$，所以虚位移方程包括有三项：

$$P_1 \delta y_D + P_2 \delta y_E + F \delta x_C = 0 \tag{a}$$

要求 δy_D、δy_E 和 δx_C，可先写出 y_D、y_E 和 x_C 如下：

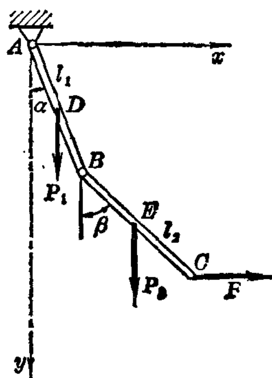


图 2-7

$$y_D=\frac{l_1}{2}\cos\alpha,$$

$$y_E=l_1\cos\alpha+\frac{l_2}{2}\cos\beta,$$

$$x_C=l_1\sin\alpha+l_2\sin\beta$$

由上式看出：α、β 是相互独立的，可以用作广义坐标。所以：

$$\delta y_D=-\frac{l_1}{2}\sin\alpha\delta\alpha$$

$$\delta y_E=-l_1\sin\alpha\delta\alpha-\frac{l_2}{2}\sin\beta\delta\beta$$

$$\delta x_C=l_1\cos\alpha\delta\alpha+l_2\cos\beta\delta\beta$$

将以上三式代入式(a)得

$$P_1\left(-\frac{l_1}{2}\sin\alpha\delta\alpha\right)+P_2\left(-l_1\sin\alpha\delta\alpha-\frac{l_2}{2}\sin\beta\delta\beta\right)+$$
$$+F(l_1\cos\alpha\delta\alpha+l_2\cos\beta\delta\beta)=0$$

则对应于 α、β 的广义力为：

$$\left.\begin{aligned}Q_\alpha&=\left(-\frac{1}{2}P_1\sin\alpha-P_2\sin\alpha+F\cos\alpha\right)l_1=0\\Q_\beta&=\left(-\frac{P_2}{2}\sin\beta+F\cos\beta\right)l_2=0\end{aligned}\right\}\qquad(b)$$

解得：

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2F}{P_2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F}{\left(\frac{P_1}{2}+P_2\right)}$$

由式(b)看出，当我们用角量做广义坐标时，对应的广义力为力矩，它们与广义坐标的乘积的量纲为功。

例 2-6 刚体的平衡条件。我们由 § 1-4 知道自由刚体的自由度 $N=6$，所以自由刚体的平衡条件也有六个。求这六个平衡条件。

解： 刚体上任一点 P 的虚速度 $\boldsymbol{v}_i$，可用下式表示：

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i$$

式中 $\boldsymbol{v}_O$ 是极点 O 的虚速度，$\boldsymbol{\omega}$ 表示刚体绕通过极点的轴的虚角速度。于是

虚速度原理可写为

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{v}_i=\sum_{i-1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)=\left(\sum_{i-1}^{n}\boldsymbol{F}_i\right)\cdot\boldsymbol{v}_O+\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i\right)\cdot\boldsymbol{\omega}$$

但 $\boldsymbol{v}_O$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 是相互独立的，因此:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=0\\\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i=0\end{aligned}\right\}\tag{2-13}$$

式中 $\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$ 是力 $\boldsymbol{F}_i$ 对极点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}_i$。所以式(2-13)可写成:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma X=0,\ \Sigma Y=0,\ \ \Sigma Z=0\\\Sigma M_x=0,\Sigma M_y=0,\Sigma M_z=0\end{aligned}\right\}\tag{2-14}$$

式(2-14)是刚体平衡的充要条件，是静力学空间一般力系的基本方程。

§2-4 力具有势函数的平衡条件·平衡的稳定性讨论[参2(a)]

若质点系每一个质点上作用的主动力都是质点位置的函数，各力的大小与函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_{3n})$ 的导数有关，而可以写成

$$X_k=-\frac{\partial V}{\partial x_k}\tag{2-15}$$

那么虚位移方程变成

$$\sum_{i=1}^{3n}X_k\delta x_k=-\sum_{i=1}^{3n}\frac{\partial V}{\partial x_k}\delta x_k=-\delta V(x_1,x_2,\cdots,x_{3n})=0$$

$V(x_1,x_2,\cdots,x_{3n})$ 称为势函数，因为它的值可以用来表示势能的大小。V 可以改写成广义坐标q_1、q_2、…、q_N的函数 $V(q_1,q_2,\cdots,q_N)$，于是平衡条件可改写成

$$\delta V(q_1,q_2,\cdots,q_N)=$$

$$=\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial V}{\partial q_N}\delta q_N=0$$

因为 δq_1、δq_2、…、δq_N 都是独立的，所以平衡条件为:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=0,\frac{\partial V}{\partial q_2}=0,\cdots,\frac{\partial V}{\partial q_N}=0 \tag{2-16}$$

事实上$-\frac{\partial V}{\partial q_i}$就是对应于$q_i$的广义力$Q_i$，所以式(2-16)就是$Q_i=0(i=1,2,\cdots,N)$的另一写法。平衡条件式(2-16)对于平衡的性质并没有任何说明。我们知道平衡可分三种不同的情况:(1)稳定平衡,(2)不稳平衡,(3)随遇平衡。现在就单自由度系统的简单情况,加以讨论。单自由度的力学系统，它若存在着势函数V,那么V只是一个广义坐标q的函数$V(q)$。如果势函数$V(q)$的图线如图2-8所示,那么我们将有以下三个结论:

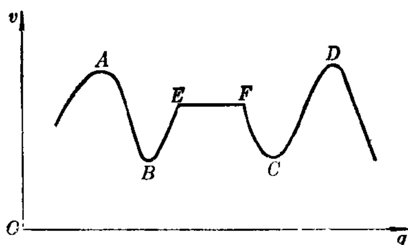


图 2-8

(1) 相对极小点B、C为稳定平衡位置;

(2) 相对极大点A、D为不稳平衡(参2)位置;

(3) 水平线段EF, $V=$常量,为随遇平衡位置。

现在说明如下:设q_0是个平衡点，q是在q_0邻近，那么由泰勒级数有

$$V(q)=V(q_0)+\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_0(q-q_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_0(q-q_0)^2+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\right)_0(q-q_0)^3\cdots \tag{2-17}$$

式中$\left(\frac{\partial^n V}{\partial q^n}\right)_0$表示$\frac{\partial^n V}{\partial q^n}$在$q=q_0$的值,因$q_0$为平衡点,所以

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_0=0$$

于是略去二次以上高阶无限小后，式(2-17)成为

$$V(q)=V(q_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_0(q-q_0)^2 \tag{2-18}$$

由上式可知，当：

(1) $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_0>0$，则上式右边第二项恒为正值。因此 $V(q)>V(q_0)$。所以此时 q_0 为相对极小点。又此时作用的广义力由式(2-18)为

$$Q=-\frac{\partial V}{\partial q}=-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_0(q-q_0) \tag{2-19}$$

当 $q-q_0>0$ 时，$Q<0$，当 $q-q_0<0$ 时，$Q>0$，所以力与位移的方向相反。这样，系统代表点偏离平衡位置后，有势力将使它恢复到原来位置，所以平衡是稳定的。

(2) $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_0<0$，由式(2-18)，$V(q)<V(q_0)$，所以 q_0 为相对极大点。再由式(2-19)，$q-q_0>0$ 时，$Q>0$；$q-q_0<0$ 时，$Q<0$；所以 Q 与位移 $q-q_0$ 的方向相同。因此有势力使代表点继续扩大与平衡位置的距离，所以 q_0 为不稳定平衡位置。

(3) 若 $V(q)$ 的各阶导数均为 0，则 $V(q)=V(q_0)=$常量，此时系统为随遇平衡。

(4) 如果 $\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)_0=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right)_0=0$，$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\right)_0\neq 0$，则 q_0 既非相对极大，也非相对极小，是个拐点，如图 2-9 所示。此时式(2-17)成为

$$V(q)=V(q_0)+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\right)_0(q-q_0)^3+\cdots$$

此时广义力为

$$Q=-\frac{\partial V}{\partial q}=\frac{-1}{2!}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\right)_0(q-q_0)^2$$

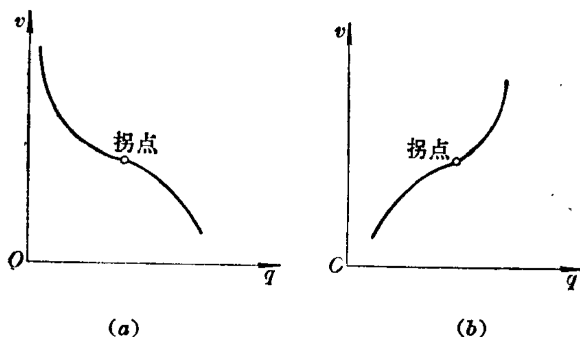


图 2-9

当$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\right)_0>0$，图线如(a)所示，$Q$ 恒为负值。

当$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^3}\right)_0<0$，图线如(b)所示，$Q$ 恒为正值。

所以此平衡是不稳定的。

总之，如果首先不为零的导数是 $\left(\frac{\partial^n V}{\partial q^n}\right)_0\neq 0$，$(n\geqslant 2)$，那么当 n 为奇数时，q_0 为不稳定平衡位置。n 为偶数时，则当 $\left(\frac{\partial^n V}{\partial q^n}\right)_0>0$ 时，$V(q_0)$取极小值，q_0 是稳定平衡位置；当$\left(\frac{\partial^n V}{\partial q^n}\right)_0<0$ 时，$V(q_0)$ 取极大值，q_0 是不稳定平衡位置。

以上平衡位置稳定性的讨论，只讨论了纯是由 q_0 的位置偏离所引起的，并没有论到具有速度的扰动。因此是纯静力学观点的判别稳定性，否则要从动力学的观点加以讨论。

例 2-7 可用于测定转动惯量的双线摆(Bifilar Pendulum) 如图 2-10 a 所示。设均质杆 AB 长 $2a$，重 Q，两端分别用长为 l 的线悬在同一水平线上的 G、D 两点，$GD=2b$。求使杆 AB 转一 θ 角所需的力偶矩M。

解：$DE=\sqrt{l^2-(b-a)^2}$。杆旋转 θ 角后，AB 达到 $A'B'$ 位置，BB' 水

平距离为 $2a\sin\frac{\theta}{2}$, 如图 2-10b 所示。又 B' 至 DE 线的垂足为 F, $C'F=b$, $C'B'=a$, 如图 2-10c 所示。故

$$\overline{B'F}^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

$$\overline{DF}^2=l^2-\overline{B'F}^2=l^2-(a^2+b^2-2ab\cos\theta)=$$

$$=l^2-(b-a)^2-4ab\sin^2\frac{\theta}{2}$$

(a) (b) (c)

图 2-10

所以

$$V=Q\sqrt{l^2-(b-a)^2-4ab\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$M=-\frac{\partial V}{\partial\theta}=Q\frac{ab\sin\theta}{\sqrt{l^2-(b-a)^2-4ab\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

图 2-11

例 2-8 正方形均质薄板，可在铅垂平面内绕通过其顶角 O 的轴转动，如图 2-11 所示。薄板的重量为 P, 边长为 a。在薄板的顶角 A 上连接一绳、绳长 l, 跨过极小滑车 B, 在下端挂一重物，物重 $Q=\frac{\sqrt{2}}{2}P$。滑车 B 在 O 点铅垂上方相距为 a 的位置上。求该系统的平衡位置，并讨论其稳定性。

解: P 和 Q 的位能以 B 为标准，则

$$V=P[a+\overline{OC}\cos(\psi+45^\circ)]-(l-\sqrt{a^2+a^2-2a^2\cos\psi})Q=$$

$$=Pa-lQ+\frac{\sqrt{2}a}{2}P\left[\cos(\psi+45^\circ)+2\sin\frac{\psi}{2}\right]$$

于是

$$\frac{\partial V}{\partial\psi}=-\frac{\sqrt{2}a}{2}P\left[\sin(\psi+45^\circ)-\cos\frac{\psi}{2}\right]=0$$

但

$$\sin(\psi+45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\psi+\cos\psi),\ \cos\frac{\psi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\psi}{2}}$$

所以条件$\frac{\partial V}{\partial\psi}=0$ 成为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\psi+\cos\psi)=\sqrt{\frac{1+\cos\psi}{2}}$$

或

$$\cos\psi(2\sin\psi-1)=0$$

(1) 若$\cos\psi=0$，则得 $\psi=\frac{\pi}{2}$，$\psi=\frac{3\pi}{2}$

(2) 若 $\sin\psi=\frac{1}{2}$，则得 $\psi=\frac{\pi}{6}$，$\psi=\frac{5\pi}{6}$

又 $\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}=-\frac{\sqrt{2}aP}{2}\left[\cos\left(\psi+45^\circ\right)+\frac{1}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right]$

于是:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}\right|_{\psi=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}aP>0,\ \text{稳定平衡；}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}\right|_{\psi=\frac{3\pi}{2}}=-\frac{3}{4}aP<0,\ \text{不稳定平衡；}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}\right|_{\psi=\frac{\pi}{6}}=-0.38886\frac{\sqrt{2}a}{2}P<0,\ \text{不稳定平衡；}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2}\right|_{\psi=\frac{5\pi}{6}}=0.4829\frac{\sqrt{2}a}{2}P>0,\ \text{稳定平衡。}$$

所以只有 $\psi=\frac{\pi}{2}$和 $\psi=\frac{5\pi}{6}$两个位置为稳定平衡。

（二）达朗伯原理

§2-5 牛顿运动第二定律和达朗伯原理

当力 $\boldsymbol{F}$ 作用于质点时，质点的动量 $m\boldsymbol{v}$ 就发生变化，而有

$$\boldsymbol{F}=\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) \tag{2-20}$$

式中 m 为质点的质量，$\boldsymbol{v}$ 为质点的速度，两者之积 $m\boldsymbol{v}$ 作为物体运动的一种度量——动量，是笛卡儿(Descartes)所引入的。

自从 1905 年爱因斯坦(Einstein)的相对论出现以后，才知道一个物体的质量 m 随速度 v 而变化。

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2-21}$$

式中 m_0 为静止质量，c 为光速。当速度接近光速时，质量随速度发生很大的变化。例如在加速器中为使粒子速度稍有增加就需供给巨大的能量。式(2-20)可改写为

$$\boldsymbol{F}=\dot{m}\boldsymbol{v}+m\boldsymbol{w} \tag{2-22}$$

式中$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$是质点的加速度。由上式看出，变质量的质点，力与加速度方向并不一定一致。但是，$v\ll c$，所以 $m\approx m_0$，是个常量。因此式(2-22)成为

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{w} \tag{2-23}$$

在这种情况下，加速度与力的方向才一致。

将 $m\boldsymbol{w}$ 移项，则式(2-23)可写成

$$\boldsymbol{F}+(-m\boldsymbol{w})=0 \tag{2-24}$$

达朗伯把$(-m\boldsymbol{w})$看作为一个力，称为惯性力。又把式(2-24)看成

为两力的平衡方程，这样可把牛顿第二定律的动力学问题转化为静力学问题来求解。这种观点的改变给求解动力学问题带来方便。

在式(2-23)中，当 $\boldsymbol{F}=0$ 时必须 $\boldsymbol{w}=0$，即 $\boldsymbol{v}=$ 常矢量，这是惯性定律，早在牛顿以前，伽利略已经给予明确。凡是惯性定律能够成立的坐标系称为惯性坐标系(Inertial coordinate system)。从式(2-23)看出，牛顿定律只有在惯性坐标系中才成立，在惯性坐标系表现的加速度 $\boldsymbol{w}_a$ 称为绝对加速度。静止于地球上的物体，它随着地球的自转和公转而运动着。地球的自转角速度

$$\omega_s=\frac{2\pi}{24\times60\times60}=7.29\times10^{-5}\ 1/\text{秒}$$

所以在纬度 φ 处静止于地面上的物体，都有约为 $\omega_s^2R\cos\varphi$ 的向心加速度(这心并非地心，而是物体所在点到地轴的垂足)。因而固定于地球上的坐标系不是惯性坐标系，工程上把它当作惯性坐标系，那是因为 ω_s 对我们日常力学现象的影响很小，所以这是近似的。

站在地球上的人们，观察到地面附近物体运动的加速度是相对于固定在地球上的坐标系的加速度，这种对动坐标系(非惯性坐标系)的加速度称为相对加速度，用 $\boldsymbol{w}_r$ 表示。以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 转动的坐标系，它的相对加速度 $\boldsymbol{w}_r$ 与绝对加速度 $\boldsymbol{w}_a$ 的关系式为

$$\boldsymbol{w}_a=\boldsymbol{w}_e+\boldsymbol{w}_k+\boldsymbol{w}_r \tag{2-25}$$

式中：

$$\boldsymbol{w}_e=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+\boldsymbol{w}_O \tag{2-26}$$

$$\boldsymbol{w}_k=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{2-27}$$

式(2-26)中的 $\boldsymbol{w}_e$ 称为牵连加速度，其中 $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}$ 为切向加速度，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是角加速度，$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 是法向加速度，$\boldsymbol{w}_O$ 是动坐标系原点的加速度。式(2-27)中 $\boldsymbol{w}_k$ 称为哥里奥利斯(Córiolis)加速度

(哥氏加速度)，$\boldsymbol{v}_r$ 是质点对于动坐标系的相对速度。

如果质点有主动力 $\boldsymbol{F}$ 和约束力 $\boldsymbol{N}$ 作用着，那么对任一惯性坐标系的牛顿第二定律可写为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}=m\boldsymbol{w}_a \tag{2-28}$$

于是将式(2-25)、(2-26)和(2-27)代入上式，并移项得

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}+(-m2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r)+\left(-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)+$$
$$+[-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]+m(-\boldsymbol{w}_0)=m\boldsymbol{w}_{0r} \tag{2-29}$$

上式是研究质点对动坐标相对运动的基本方程，上式左边包含四种惯性力，前三种有专用名词：

$-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$，　　称为哥氏惯性力

$-m\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}$，　　称为切向惯性力

$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$，　　称为离心力

这些惯性力在动坐标系中以力的形式出现。

例 2-9 如图 2-12 所示，测量地球表面铅垂线的偏差时，用一细绳悬挂一质量为 m 的质点 M。由于地球的自转，质点在纬度 φ 处有大小为 $m\omega^2R\cos\varphi$ 的离心力 $\boldsymbol{G}_e$ 作用，因而质点悬线的方向并非真正通过地心。地球的自转角速度变化很小，可以看成为 $\varepsilon=0$，所以质点上没有切向惯性力作用。又由于质点相对于地球是静止的，哥氏惯性力亦为 0。因此，作用于质点的力有地球的引力 $\boldsymbol{F}$，细绳的拉力 $\boldsymbol{T}$ 和离心力 $\boldsymbol{G}_e$，质点以 $R\cos\varphi$ 为半径，以每天一周的角速度绕地轴运动着。由正弦定律得

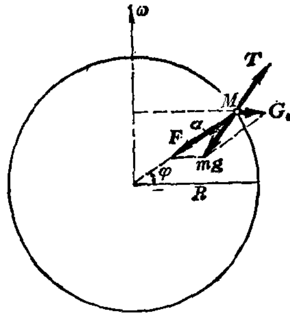


图 2-12

$$\frac{mg}{\sin\varphi}=\frac{m\omega^2R\cos\varphi}{\sin\alpha}$$

所以

$$\sin\alpha=\frac{\omega^2R\sin2\varphi}{2g}$$

偏角 α 在 $\varphi=45°$ 时最大，约为 $\alpha=\frac{\omega^2R}{2g}=1.73\times10^{-3}\approx6'$。

在地球附近运动的质点，由于 $\boldsymbol{v}_r\neq0$，有哥氏惯性力 $m2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ 作用，此时离心力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 含 ω^2 而为二阶微量，与重力和哥氏惯性力相比为可略，并略去地心公转向心加速度 $\boldsymbol{w}_0$ 引起的惯性力 $(-m\boldsymbol{w}_0)$，所以式(2-29)成为

$$\boldsymbol{w}_r=-g\boldsymbol{k}-2\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}_r+\frac{1}{m}\boldsymbol{N} \tag{2-30}$$

对上式可用直交坐标 x 指向南，y 指向东，z 指向上，如图 2-13 所示。

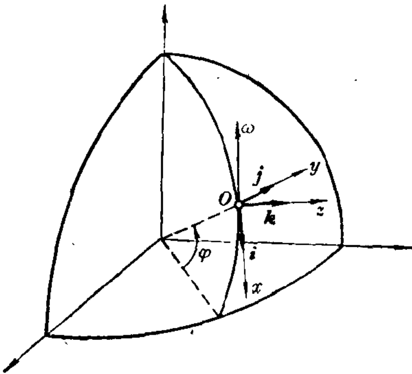


图 2-13

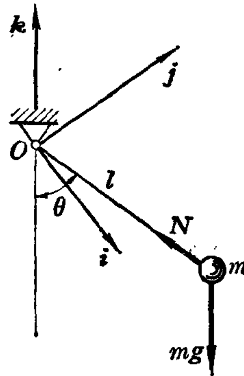


图 2-14

例2-10 傅科摆[参2(b)]

地球表面的球面摆，作用于质量为 m 的质点的重力为 $-mg\boldsymbol{k}$，绳的约束力为 $\boldsymbol{N}=m\boldsymbol{T}$，如图 2-14 所示。则由于

$$\boldsymbol{\omega}=-\omega\cos\varphi\boldsymbol{i}+\omega\sin\varphi\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -\omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=$$

$$=-\omega v_y\sin\varphi\boldsymbol{i}+\omega(v_z\cos\varphi+v_x\sin\varphi)\boldsymbol{j}-v_y\omega\cos\varphi\boldsymbol{k}$$

于是式 (2-30) 成为:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}&=2\omega\frac{dy}{dt}\sin\varphi-T\frac{x}{l}\\
\frac{d^2y}{dt^2}&=-2\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\varphi+\frac{dx}{dt}\sin\varphi\right)-T\frac{y}{l}\\
\frac{d^2z}{dt^2}&=2\omega\frac{dy}{dt}\cos\varphi-T\frac{z}{l}-g
\end{aligned}\right\}\qquad(a)
$$

现在限于研究摆动角度θ微小的情况。这样，由约束方程

$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

可得

$$z=-l\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{l^2}}\approx-l$$

式(a)的第三式成为

$$T=-2\omega\frac{dy}{dt}\cos\varphi+g$$

又因ω很小，所以略去前面一项，又可近似地为

$$T=g$$

因$\frac{d^2z}{dt^2}\approx0$，$\frac{dz}{dt}\approx0$，并令$\omega_1=\omega\sin\varphi$，所以式$(a)$的前面两式成为：

$$
\left.\begin{aligned}
\ddot{x}-2\omega_1\dot{y}&=-\frac{g}{l}x\\
\ddot{y}+2\omega_1\dot{x}&=-\frac{g}{l}y
\end{aligned}\right\}\qquad(b)
$$

应用坐标变换，如图2-15所示，得：

$$
\left.\begin{aligned}
x&=x_1\cos\omega_1t+y_1\sin\omega_1t\\
y&=-x_1\sin\omega_1t+y_1\cos\omega_1t
\end{aligned}\right\}\qquad(c)
$$

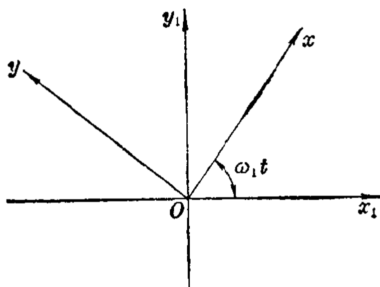


图 2-15

式(b)成为：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1+\left(\omega_1^2+\frac{g}{l}\right)x_1=0\\ \ddot{y}_1+\left(\omega_1^2+\frac{g}{l}\right)y_1=0\end{aligned}\right\}\qquad(d)$$

又一般 $\omega_1^2\ll\frac{g}{l}$，所以上式可简化为

$$\ddot{x}_1+\frac{g}{l}x_1=0\quad 和\quad \ddot{y}_1+\frac{g}{l}y_1=0$$

由此可见上两式都是简谐运动，周期

$$P_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\qquad(e)$$

与长为 l 的单摆相同。但是坐标轴转动的角速度为 ω_1，因此摆动的坐标平面的转动周期为

$$P_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi}{\omega\sin\varphi}=\frac{24^{h}}{\sin\varphi}\quad（恒星时）\qquad(f)$$

实验的时候将单摆拉向一边，然后无初速地释放，此时 $\dot{x}_0=0,\dot{y}_0=0$。其中足标 0 表示 $t=0$。将式 (c) 对 t 取导数得：

$$\dot{x}=\dot{x}_1\cos\omega_1t+\dot{y}_1\sin\omega_1t-\omega_1x_1\sin\omega_1t+\omega_1y_1\cos\omega_1t$$

$$\dot{y}=-\dot{x}_1\sin\omega_1t+\dot{y}_1\cos\omega_1t-\omega_1x_1\cos\omega_1t-\omega_1y_1\sin\omega_1t$$

当 $t=0$ 时，由上式得：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(0)=-\omega_1y_1(0)\\ \dot{y}_1(0)=\omega_1x_1(0)\end{aligned}\right\}\qquad(g)$$

又因作用于质点的合力近似地可看成为有心力，它的面积分是常数，所以

$$x_1\dot{y}_1-y_1\dot{x}_1=面积速度常数=x_1(0)\dot{y}_1(0)-y_1(0)\dot{x}_1(0)=$$

$$=\omega_1[x_1^2(0)+y_1^2(0)]=\omega_1a^2$$

式中 a 是质点离开摆的最低点的最大水平距离。

但面积速度常数 $=\frac{2(P_0\text{ 时间内矢径扫出面积})}{P_0}$，$P_0$ 时间内矢径扫出面积 $=$ 椭圆面积 $=\pi ab$。于是

$$a^2\omega_1=\frac{2\pi ab}{P_0}\qquad 或\qquad \frac{a}{P_1}=\frac{b}{P_0}$$

即椭圆的长轴和短轴之比等于摆动坐标面的转动周期与单摆周期之比（这是 Chevilliet 定理）。这种不断变化的（瞬时）椭圆曲线形成似图 2-16 的曲线。

坐标轴的转动可以验证"地球是以角速度 $\omega=2\pi/86164.1=0.000072921$ 弧度/秒自转着。傅科于1851年在巴黎的帕提翁(Pantheon)用 $l=67$ 米，$a=3$ 米，测出 $b/a=1/7200$，$P_1=16^s$，$P=32^h$。巴黎的纬度是北纬48°，由此用上述理论计算，在误差范围内正确无误。

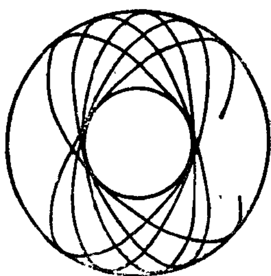


图 2-16

§2-6 刚体一般运动惯性力系的简化

既然惯性力的表现与力一样，那么我们可以把一个质点系的惯性力像力系一样加以简化。惯性力系 $-m_1\boldsymbol{w}_1$，$-m_2\boldsymbol{w}_2$，…，$-m_n\boldsymbol{w}_n$ 对空间任一点 O 简化，可以得到一个惯性力主矢

$$\boldsymbol{F}^{(n)}=-\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{w}_i=-\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i=-\frac{d^2}{dt^2}M\boldsymbol{r}_C=$$

$$=-M\boldsymbol{w}_C \tag{2-31}$$

和一个惯性主矩

$$\boldsymbol{M}^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times(-m_i\boldsymbol{w}_i)=$$

$$=-\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i\right) \tag{2-32}$$

由上两式可知：一个惯性力系经简化得到的(1)惯性力主矢等于质点系的总质量 M 乘以质点系的质心加速度 $\boldsymbol{w}_C$，方向与 $\boldsymbol{w}_C$ 相反；(2)惯性主矩等于质点系对 O 点的总动量矩的变化率冠以负号。

1. 应用惯性力系简化所表示的动力方程

对于像太阳系那样的自由质点系，经这样形式上的简化，可能会引入错误的概念和解题法，认为"惯性力主矢和惯性主矩可以用

来代替所有 n 个惯性力”。事实上从计算独立的动力方程的个数知道，除非 $n=2$，或这个质点系是个刚体，否则二者是不一样的。不过简化结果可以表示质点系整体的特性，但非个体的运动情况。

设有一个含有 n 个质点的质点系，其中质量为 m_i 的质点 P_i 作用着主动力 $\boldsymbol{F}_i$，约束力 $\boldsymbol{N}_i$，质点系中其它质点 P_j 作用于质点 P_i 的力 $\boldsymbol{F}_{ij}$。质点 P_i 的加速度为 $\boldsymbol{w}_i$，那么按式(2-28)有

$$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}+(-m_i\boldsymbol{w}_i)=0 \qquad (i=1、2、\cdots、n)① \tag{2-33}$$

如果这个质点系的约束力是由 m 个约束方程确定的，那么这个系统的自由度是 $3n-m$。这样式(2-33)只有 $3n-m$ 个方程是独立的。运动微分方程组的阶数是 $2(3n-m)$。

如将式(2-33)各式相加得

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}+\sum_{i=1}^{n}(-m_i\boldsymbol{w}_i)=0 \tag{2-34}$$

应用作用和反作用定律：$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}$，有 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}=0$。

令 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}$，$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{N}$，则式(2-34)可写为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}-M\boldsymbol{w}_C=0 \tag{2-35}$$

因为作用在质点 P_i 上的力 $\boldsymbol{F}_i$、$\boldsymbol{N}_i$、$\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}$、$-m_i\boldsymbol{w}_i$ 成为平衡力系，所以这些力对 O 点的矩之和为零，即

$$\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{N}_i+\boldsymbol{r}_i\times\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}-\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{w}_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

将以上 n 式相加得

① $\boldsymbol{F}_{ii}=0$，因质点对它自己没有作用力。

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{N}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times(m_i\boldsymbol{w}_i)=0 \tag{2-36}$$

应用作用和反作用定律：$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}$，则有

$$\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji}=(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\times\boldsymbol{F}_{ij}=0$$

因为$\boldsymbol{F}_{ij}$与$\boldsymbol{r}_{ij}$共线，故式(2-36)可以简化成

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{N}_i-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i=0 \tag{2-37}$$

式(2-35)和(2-37)共有六个方程，只能用来求解自由度$N\leqslant6$的动力学问题。所以惯性力系的简化理论对研究一个刚体的运动是有价值的。事实上，式(2-35)就是质点系的质心运动定理，式(2-37)就是质点系的动量矩定理。

2. 刚体运动时其惯性力系有合力的两种简单情况

现在说明，对于刚体的平动和刚体的平面平行运动，当两者简化后，所得惯性力主矢不为零时，都可以将惯性力系简化为一个合力。不过对于后者，必须是能化为平面惯性力系的情况。属于这种情况的有：1)薄平板在其自身平面内的运动；2)具有一对称平面的刚体，并且其质量的分布亦对称于此平面，而刚体运动时对称平面始终平行于固定平面。这样刚体作平面平行运动时，任何一对对称体元的惯性力的合成正好在对称平面上，所以整个刚体的惯性力系等效于在对称平面内的惯性力系，如图2-17所示。

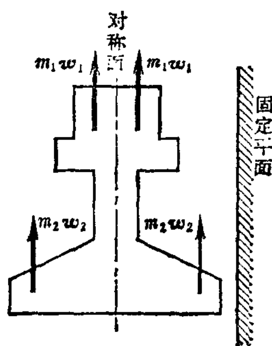


图 2-17

（1）刚体平动时，刚体上各点的加速度都相同，所以刚体上各点的惯性力形成同向平行力系。我们知道同向平行力系必定有一个合力；又因惯性力的大小与其质量成正比，所以刚体平动时整个惯性力作用在质心上，这个惯性力为$-M\boldsymbol{w}_C$。

（2）对于上述能化成平面惯性力系的刚体平面平行运动，只要$\boldsymbol{w}_C \neq 0$，其惯性力系也可化成一个合力。因为平面力系，如果其主矢不为零，一定可以简化成一个合力。因此，对于所说刚体的运动来说，它的惯性力系简化成一个合力$-M\boldsymbol{w}_C$，它的作用点P的位置矢$\boldsymbol{r}_P$由下式决定：

$$\boldsymbol{r}_P \times (M\boldsymbol{w}_C) = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{w}_i = \frac{d}{dt}\sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

如果惯性力主矢为零，则惯性力系的合力不存在。此时，如果惯性力主矩为零，则成为惯性平衡力系；如果惯性力主矩不为零，则可化为一个惯性力偶。

例 2-11 三棱柱A沿三棱柱B的光滑斜面滑动，A和B各重P和Q，三棱柱B的斜面与水平面成α角，如图 2-18 所示。如开始时物系静止，试求三棱柱B的加速度。摩擦略去不计。

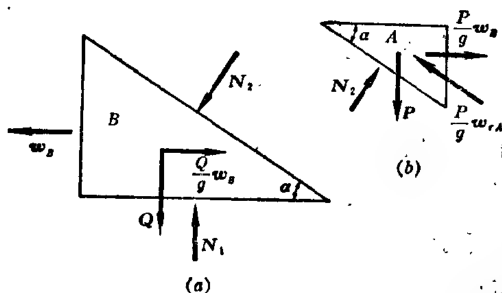


图 2-18

解：设三棱柱B的加速度为w_B，则作用在B上的有四个力(包括一个惯性力$\frac{Q}{g}w_B$)：$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{N}_1$，$\boldsymbol{N}_2$，$\frac{Q}{g}\boldsymbol{w}_B$。

设三棱柱A相对于B的加速度为$\boldsymbol{w}_{rA}$，则A上也可以看成作用着四个力

(包括两个惯性力)$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{N}_2$、$\frac{P}{g}\boldsymbol{w}_{rA}$、$\frac{P}{g}\boldsymbol{w}_B$、如图 2-18$b$ 所示。其中$\frac{P}{g}\boldsymbol{w}_B$是由于$\boldsymbol{B}$作加速运动，而使 A 有牵连加速度 $\boldsymbol{w}_B$。

于是由式(2-35)可得到四个方程，其中 B 的铅垂分量方程用于求 $\boldsymbol{N}_1$，可以不用，需用的三个方程如下：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{P}{g}w_B+N_2\sin\alpha-\frac{P}{g}w_{rA}\cos\alpha=0\\&P-N_2\cos\alpha-\frac{P}{g}w_{rA}\sin\alpha=0\\&\frac{Q}{g}w_B-N_2\sin\alpha=0\end{aligned}\right\}$$

联立求解得：

$$w_B=\frac{g}{2}\,\frac{P\sin2\alpha}{Q+P\sin^2\alpha},\qquad N_2=\frac{QP\cos\alpha}{Q+P\sin^2\alpha}$$

$$w_{rA}=\frac{(P+Q)\sin\alpha}{Q+P\sin^2\alpha}g$$

3. 刚体的惯性主矩

设一质点系中质量为 m_i 的质点对作为静止的某惯性坐标系的原点 O 的位置矢为 $\boldsymbol{r}_i$，对这个惯性坐标系的加速度为$\boldsymbol{w}_i$，则因

$$\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{w}_i=\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_i\times(m_i\boldsymbol{v}_i)]-\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\times(m_i\boldsymbol{v}_i)=$$

$$=\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i]$$

所以

$$\sum_i\boldsymbol{r}_i\times(-m_i\boldsymbol{w}_i)=-\sum_i\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i]=$$

$$=-\frac{d}{dt}\sum_i[\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i]\tag{2-38}$$

即一质点系对 O 点的总惯性力矩等于质点系对 O 点的总动量矩的变化率冠以负号。

设 O' 为刚体上任一参考点，O' 点相对于 O 点的速度为 $\boldsymbol{v}_{O'}$，则 $\boldsymbol{v}_i$ 可以写为

$$\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i \tag{2-39}$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 为刚体转动角速度。于是整个刚体对于 O 点的动量矩 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=\Sigma\boldsymbol{r}_i\times m_i\boldsymbol{v}_i=\Sigma\boldsymbol{r}_i\times m_i(\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)=$$

$$=\Sigma\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)m_i-\boldsymbol{v}_{O'}\times\Sigma m_i\boldsymbol{r}_i$$

如果 O' 为刚体上的瞬时中心，则 $\boldsymbol{v}_{O'}=0$；如果 O' 为刚体的质心 C，则 $\Sigma m_i\boldsymbol{r}_i=0$。在这两种情况下，$\boldsymbol{v}_{O'}\times\Sigma m_i\boldsymbol{r}_i=0$。所以对刚体的固定点 O' 或质心 C，刚体的动量矩为

$$\boldsymbol{H}=\int\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})dm \tag{2-40}$$

其中积分是表示对于整个刚体的。

但

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})$$

所以

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\omega}\int r^2dm-\int\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega})dm=$$

$$=\boldsymbol{\omega}\int(x^2+y^2+z^2)dm-\int(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})(x\omega_x+y\omega_y+$$

$$+z\omega_z)dm$$

$$=[\omega_x\int(y^2+z^2)dm-\omega_y\int xydm-\omega_z\int xzdm]\boldsymbol{i}+$$

$$+[\omega_y\int(x^2+z^2)dm-\omega_x\int xydm-\omega_z\int yzdm]\boldsymbol{j}+$$

$$+[\omega_z\int(x^2+y^2)dm-\omega_x\int xzdm-\omega_y\int yzdm]\boldsymbol{k}$$

令：

$$\left.\begin{aligned}&A=\int(y^2+z^2)dm,\ B=\int(z^2+x^2)dm,\ C=\int(x^2+y^2)dm\\&D=\int yzdm,\ E=\int zxdm,\ F=\int xydm\end{aligned}\right\} \tag{2-41}$$

则：

$$
\left.\begin{aligned}
H_x &= A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z \\
H_y &= -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z \\
H_z &= -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z
\end{aligned}\right\} \tag{2-42a}
$$

上式可用矩阵表示为

$$
\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{2-42b}
$$

A、B、C 分别表示刚体绕 x、y、z 轴的惯性矩，D、E、F 称为惯性积。对于固定于刚体的坐标系 $O'x'y'z'$，这些量都是常量。如果对于固定于惯性空间的坐标系 $Oxyz$，那么由于旋转轴的变动，这些量都变成变量，由式(2-41)可以看出 A、B、C 恒为正量，但 D、E、F 则可正、可负，也可为0。我们可以证明在刚体内选择适当的坐标系$O\xi\eta\zeta$，可以使 $D=E=F=0$。于是式(2-41)成为：

$$
\left.\begin{aligned}
H_\xi &= A\omega_\xi \\
H_\eta &= B\omega_\eta \\
H_\zeta &= C\omega_\zeta
\end{aligned}\right\} \tag{2-43}
$$

这种坐标系的坐标轴 $\xi\eta\zeta$ 称为惯性主轴。

4. 刚体定点转动的欧拉方程

将 $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{N}_i$ 用其合力 $\boldsymbol{R}_i$ 代替，则

$$
\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{M}_i
$$

为作用于 m_i 点的外力对固定点 O 的矩。

令

$$
\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{N}_i)
$$

则式(2-37)可简写为

$$
\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} = \boldsymbol{M} \tag{2-44}
$$

所以刚体对空间固定点的动量矩的变化率等于作用于刚体的外力对同点的矩。

把固定点 O 改为刚体质心 C，坐标系 $Cxyz$ 的坐标轴保持不变，则式(2-44)也成立。令 $\boldsymbol{r}_C$ 为 C 对 O 的位置矢，$\boldsymbol{\rho}_i$ 为 m_i 对 C 的位置矢，则:

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\rho}_i,\ \dot{\boldsymbol{r}}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_C+\dot{\boldsymbol{\rho}}_i,\ \sum m_i\boldsymbol{\rho}_i=0,\ \sum m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i=0$$

故

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\rho}_i)\times m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_C+\dot{\boldsymbol{\rho}}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{\rho}_i)\times\boldsymbol{R}_i$$

应用式(2-35)，可化为

$$\frac{d}{dt}\sum\boldsymbol{\rho}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\rho}_i\times\boldsymbol{R}_i \tag{2-45}$$

对于刚体定点转动，$Oxyz$ 为过定点 O 的动坐标系，对它的动量矩为 $\boldsymbol{H}$，则有

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}&=\frac{d}{dt}(H_x\boldsymbol{i}+H_y\boldsymbol{j}+H_z\boldsymbol{k})=\\&=\frac{dH_x}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dH_y}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dH_z}{dt}\boldsymbol{k}+H_x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+H_y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+H_z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\end{aligned}$$

但

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\omega_x&\omega_y&\omega_z\\1&0&0\end{vmatrix}=\omega_z\boldsymbol{j}-\omega_y\boldsymbol{k}$$

同样

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\omega_x\boldsymbol{k}-\omega_z\boldsymbol{i},\ \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=\omega_y\boldsymbol{i}-\omega_x\boldsymbol{j}$$

所以

$$\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}=\left(\frac{dH_x}{dt}+H_z\omega_y-\omega_zH_y\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{dH_y}{dt}+H_x\omega_z-\omega_xH_z\right)\mathbf{j}+$$

$$+\left(\frac{dH_z}{dt}+H_y\omega_x-\omega_yH_x\right)\mathbf{k}$$

应用式(2-43)和上式，则式(2-45)的分量式成为：

$$\left.\begin{aligned}A\frac{d\omega_x}{dt}+\omega_y\omega_z(C-B)=M_x\\ B\frac{d\omega_y}{dt}+\omega_z\omega_x(A-C)=M_y\\ C\frac{d\omega_z}{dt}+\omega_x\omega_y(B-A)=M_z\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}46)$$

上式是欧拉于1765年得到的，称为欧拉方程，是研究刚体定点转动和陀螺仪的基本方程。式(2-46)的坐标轴 x、y、z 是固定于刚体的，这样，A、B、C 才是常量，它与空间固定坐标系 $O'x'y'z'$ 的联系是由第一章§1-2所述的欧拉角决定的。

5. 刚体沿一固定表面作平面纯滚动时惯性力系对瞬时中心的矩

如图2-19所示，设刚体 A 沿另一固定刚体 B 的表面作纯滚动，那么接触点 P 就是瞬时速度中心。在 P 点，A 和 B 具有公共法线。因 P 点一般不是刚体 A 的加速度中心，所以刚体上的 P 点在这接触的瞬时具有加速度 $\boldsymbol{w}_P$。我们知道 $\boldsymbol{w}_P$ 的方向沿刚体 A 的内法线。

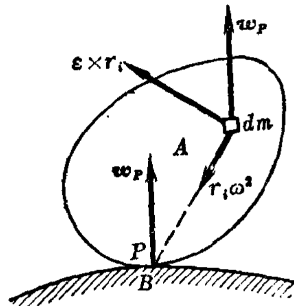


图 2-19

刚体 A 上任一点的加速度 $\boldsymbol{w}_i$ 等于相对加速度 $\boldsymbol{w}_{ir}$ 与牵连加速度 $\boldsymbol{w}_{ie}(=\boldsymbol{w}_P)$ 之和，即

$$\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{w}_{ir}+\boldsymbol{w}_{ie}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_i\omega^2+\boldsymbol{w}_P$$

于是在刚体 A 的质元 dm 对 P 点的惯性力矩为

$$-\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{w}_i dm=-\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_i\omega^2+\boldsymbol{w}_P)dm$$

刚体A对P点的总惯性力矩为

$$\boldsymbol{M}^{(\mathrm{I})}=-\int\boldsymbol{r}_i\times(\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_i)dm-\int\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{w}_P dm=$$

$$=-\boldsymbol{\varepsilon}\int r^2dm+\boldsymbol{w}_P\times\int\boldsymbol{r}dm=$$

$$=-\boldsymbol{\varepsilon}J_P+\boldsymbol{w}_P\times\boldsymbol{r}_C M$$

只有$\boldsymbol{r}_C /\!/ \boldsymbol{w}_P$时，才有$\boldsymbol{w}_P\times\boldsymbol{r}_C=0$。亦即刚体质心$C$在$P$点的法线上时，上式第二项才等于零。要任何时候都是如此，那么刚体A必须是圆轮或球才行。在这种情况下，$\boldsymbol{M}^{(\mathrm{I})}=-J_P\boldsymbol{\varepsilon}$。

第二篇　分析力学的基本方程

第三章　动力学方程的三种基本型式

§3-1　动力学方程的第一种基本型式——动力学普遍方程

将质点系的运动方程写成达朗伯方程的形式:

$$m_i \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{N}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij} = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \quad (3\text{-}1)$$

将上式标乘以质点的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$，然后总和得

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{N}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

应用理想约束的定义　$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$ 得

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{F}_i - \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

上式是虚位移原理与达朗伯原理结合而得到的方程，是整个分析力学的基本方程，在理论力学中称为动力学普遍方程。

如将坐标和力及质量采用统一符号，则式(3-2)可改写成更紧缩的形式

$$\sum_{r=1}^{3n} (m_r \ddot{x}_r - X_r) \delta x_r = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

式(3-2)中的 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 是质点系中质点 m_j 作用于质点 m_i 的内力

(注意 $F_{ii}=0$)。这内力可以是主动力，例如太阳系中行星之间的万有引力，也可以是约束力。若这内力约束也是理想约束，那么它在式(3-2)中的对应部分亦为 0。

例 3-1 余弦调速器的形状是一个曲杠杆，在此杆两端分别固连着质量相同的重物 A 和 B，如图 3-1 所示。杠杆的两臂长各为 l_1 和 l_2(且 $l_1 \neq l_2$)，杠杆的弯角等于 90°。忽略杠杆的重量以及在轴中的摩擦，试求当两重物的中心连线处于水平时调速器的转动角速度。

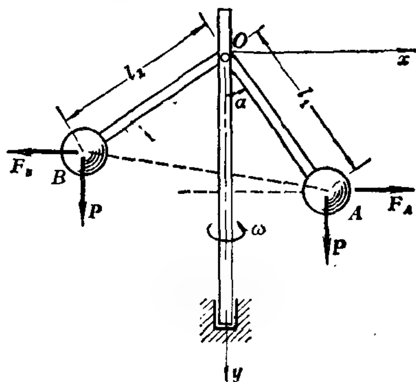


图 3-1

解：在 A 球上作用着力 P 和惯性力 $F_A=\frac{P}{g}\omega^2 l_1 \sin\alpha$，在$B$球上作用着力 P 和惯性力 $F_B=\frac{P}{g}\omega^2 l_2 \sin(90^\circ-\alpha)$。取 x 和 y 轴如图示，则动力学方程为

$$F_A\delta x_A + P\delta y_A + F_B\delta x_B + P\delta y_B = 0. \tag{A}$$

但

$$x_A = l_1\sin\alpha, \qquad y_A = l_1\cos\alpha$$

$$x_B = -l_2\sin(90^\circ-\alpha), \qquad y_B = l_2\cos(90^\circ-\alpha)$$

所以

$$\delta x_A = l_1\cos\alpha\delta\alpha, \qquad \delta y_A = -l_1\sin\alpha\delta\alpha$$

$$\delta x_B = l_2\sin\alpha\delta\alpha, \qquad \delta y_B = l_2\cos\alpha\delta\alpha$$

于是式(A)成为

$$\frac{P}{g}\omega^2 l_1\sin\alpha(l_1\cos\alpha)\delta\alpha + P(-l_1\sin\alpha)\delta\alpha$$

$$-\frac{P}{g}\omega^2 l_2\cos\alpha(l_2\sin\alpha)\delta\alpha+P(l_2\cos\alpha)\delta\alpha=0.$$

因 $\delta\alpha\neq0$，故上式简化后得

$$\frac{\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha(l_1^2-l_2^2)-l_1\sin\alpha+l_2\cos\alpha=0$$

或

$$\omega^2=\frac{l_1\sin\alpha-l_2\cos\alpha}{(l_1^2-l_2^2)\sin\alpha\cos\alpha}g=\frac{l_1\text{tg}\,\alpha-l_2}{(l_1^2-l_2^2)\sin\alpha}g \tag{B}$$

上式对 AB 与水平线的任何倾角 φ 都成立。

现在再求 $\varphi=0$ 的几何条件。因 $AB=\sqrt{l_1^2+l_2^2}$，而 AB 在水平线上的投影为 $l_1\sin\alpha+l_2\cos\alpha$，当 $\varphi=0$ 时投影与 AB 相同，故

$$l_1\sin\alpha+l_2\cos\alpha=\sqrt{l_1^2+l_2^2}$$

两边平方，然后移至一边，得

$$(l_1\cos\alpha-l_2\sin\alpha)^2=0$$

故

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{l_1}{l_2}$$

将此式代入式(B)即得

$$\omega^2=\frac{g}{l_2\sin\alpha}=\frac{\sqrt{l_1^2+l_2^2}}{l_1 l_2}g$$

例 3-2 如图 3-2 所示，起重机构的主动鼓轮 I 的半径为 R，其上作用

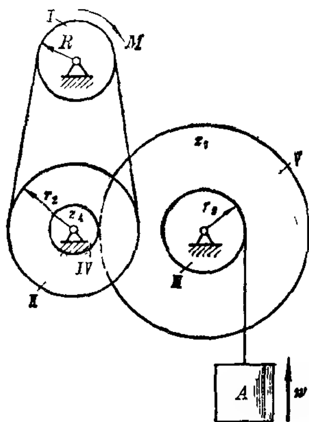


图 3-2

有不变的转矩M；鼓轮 II 和 III 的半径分别为 r_2 和 r_3，齿轮 IV 和 V 的齿数分别为 z_4 和 z_5。被提起重物 A 的重量为 P，试求这重物的加速度。各转动部件和绳索的质量，以及各轴承中的摩擦均不计。

解：由于绳索和胶带变形不作功，故动力学方程为

$$\left(P+\frac{P}{g}w\right)\delta p+M\delta\theta=0 \tag{A}$$

但

$$R\delta\theta=r_2\delta\theta_2,\qquad \delta\theta_2=\delta\theta_4,\qquad z_4\delta\theta_4=z_5\delta\theta_5,$$
$$\delta\theta_5=\delta\theta_3,\qquad r_3\delta\theta_3=-\delta p$$

所以

$$\delta\theta=-\frac{r_2z_5}{Rr_3z_4}\delta p$$

上式代入式(A)得

$$w=\left(\frac{Mr_2z_5}{PRr_3z_4}-1\right)g$$

例 3-3 求弹性弦的微振动方程。如图 3-3 所示，弦的两端固定于 $x=0$ 和 $x=l$。假定弦是完全柔软的，在 $z=0$ 的平面内让它振动。弦的单位长度质量为 ρ，[参 3(a)]。

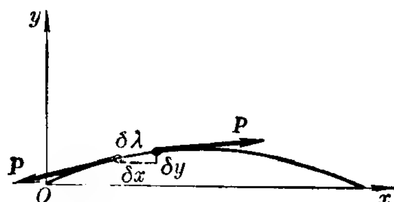


图 3-3

解：对于连续变形物体，只要把总和记号换成积分。对于微段 dx，其质量为 $dm=\rho dx$，$wdm=\ddot{y}\rho dx$，弦的张力为 P，微段伸长为 $\delta\lambda$。将这段变形功表示成位能形式，得动力学方程

$$\Sigma(P\delta\lambda+wdm\delta y)=\int_0^l(P\delta\lambda+\ddot{y}\rho\delta ydx)=0 \tag{A}$$

式中

$$\lambda=\int_0^l\sqrt{1+y'^2}\,dx\qquad\left(y'=\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

因为是微振动，y' 不大，$\sqrt{1+y'^2}\approx1$。

所以

$$\delta\lambda=\frac{1}{2}\frac{2y'\delta y'}{\sqrt{1+y'^2}}dx\approx y'\delta y'dx$$

于是

$$\int_0^l(Py'\delta y'+\ddot{y}\rho\delta y)dx=0 \tag{A}$$

$\delta y'=\delta\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\delta y)$ 所以

$$P\int_0^l y'\delta y'dx=P\int_0^l y'\frac{\partial}{\partial x}(\delta y)dx=$$

$$=Py'\delta y\Big|_0^l-P\int_0^l y''\delta ydx=-P\int_0^l y''\delta ydx$$

因 δy 具有二阶导数，属于 C_2 类函数①。在 $x=0$ 和 $x=l$ 处 $\delta y=0$。于是

$$\int_0^l(-Py''+\rho\ddot{y})\delta ydx=0 \tag{B}$$

令 $a^2=\frac{P}{\rho}$，则因以上积分对任何时间都成立，又 δy 是可以任意选择的，故得

$$-Py''+\rho\ddot{y}=0$$

即

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{C}$$

这是弦振动的波动方程。

上式推导的是 $(0,l)$ 的一段弦，也适用于 $l\to+\infty$ 的半无限长弦和两端无限长弦。显然 $y=f(x-at)$ 适合式 (C)，表示波动以速度 a 向 x 正方向传播，而 $y=f(x+at)$ 是反向传播的波动。

§3-2 动力学方程的第二种基本型式

设有某一含 n 个质点的质点系，它有运动约束

$$\sum_{i=1}^{3n}A_{is}\dot{x}_i+A_s=0 \tag{3-4}$$

---

① 一个单变数或多变数的函数，如果它在 D 域中存在着所有 P 阶导数，并且在 D 域中是连续的，则称这函数为 C_P 类函数。

在同一时间对于同一位形(Same configuration)如另有一个可能速度 $\dot{x}_1+\Delta\dot{x}_1$、$\dot{x}_2+\Delta\dot{x}_2$、…、$\dot{x}_{3n}+\Delta\dot{x}_{3n}$，那么

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{is}(\dot{x}_i+\Delta\dot{x}_i)+A_s=0$$

将上两式结合得

$$\sum_{i=1}^{3n} A_{is}\Delta\dot{x}_i=0 \tag{3-5}$$

设这质点系除了运动约束以外，尚有含时几何约束

$$f_k(t; x_1, x_2, \cdots, x_{3n})=0$$

则将上式对 t 取导数有

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_k}{\partial t}=0 \tag{3-6}$$

因此也有

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\Delta\dot{x}_i=0 \tag{3-7}$$

式(3-5)和(3-7)型式基本相同。为简单起见都以式(3-5)表示，并假定共有 L 个。

以上所得到的 L 个式(3-5)，是由所给的约束方程得到的。但是动力方程中所包含的是约束力，为此必须求出 $3n$ 个 $N_i(i=1, 2, \cdots, 3n)$ 用 L 个约束方程的已知系数来表示的关系式。

假定 $3n$ 个约束力属于理想约束，那么

$$\sum_{i=1}^{3n} N_i\delta x_i=0$$

将上式除以 $\delta t\ (\neq 0)$，得

$$\sum_{i=1}^{3n} N_i\frac{\delta x_i}{\delta t}=\sum_{i=1}^{3n} N_i\dot{x}_i=0$$

于是可得

$$\sum_{i=1}^{3n} N_i \Delta \dot{x}_i = 0 \tag{3-8}$$

上式包含 $3n$ 个 $\Delta \dot{x}_i (i = 1, 2, \cdots, 3n)$。由于有了式(3-5)，所以式(3-8)中的 $\Delta \dot{x}_i$ 不是相互独立的，独立的 $\Delta \dot{x}_i$ 只有 $3n-L$ 个。当然可用代入消去法来消去其中任何 L 个 $\Delta \dot{x}_i$，在分析力学里常用的是拉格朗日不定乘子法。

取 L 个不定乘子 $\lambda_s (s=1, 2, \cdots, L)$ 顺次与 L 个式(2-5)相乘，然后求总和，得

$$\sum_{s=1}^{L} \lambda_s \sum_{i=1}^{3n} A_{is} \Delta \dot{x}_i = 0 \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{3n} \Delta \dot{x}_i \sum_{s=1}^{L} \lambda_s A_{is} = 0$$

将上式与式(3-8)相加得

$$\sum_{i=1}^{3n} (N_i - \sum_{s=1}^{L} \lambda_s A_{is}) \Delta \dot{x}_i = 0$$

我们可以任取上式中 L 个括号等于零，来确定 L 个 λ_s。由于 L 个约束方程是相互独立的，所以 $\|A_{is}\|$ 的秩为 L，这样一定可以解出 L 个 λ_s。留下 $3n-L$ 个 $\Delta \dot{x}_i$ 需用运动方程来确定。未与运动方程结合以前，它们是相互独立的，因此每一个括号必须为零，于是我们得到

$$N_i = \sum_{s=1}^{L} \lambda_s A_{is} \qquad (i=1, 2, \cdots, 3n) \tag{3-9}$$

上式就是未知的约束力用约束方程的系数来表示的关系式。

将 n 个质点的 $3n$ 个动力方程

$$m_i \ddot{x}_i - X_i - X_{ij} - N_i = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, 3n)$$

乘以 $\Delta \dot{x}_i$，然后求总和，再应用式(3-8)得

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i - X_{ij}) \Delta \dot{x}_i = 0 \tag{3-10}$$

上式就是动力方程的第二种型式。值得注意的是虚速度 $\Delta\dot{x}_i$ 不必为无限小，将 $\Delta\dot{x}_i$ 看作有限值也可以，即 $\Delta\dot{x}_i$ 改为 $\dot{x}_i$ 也成立。

例 3-4 利用式(3-10)来推导无粘滞性不可压缩理想液体的欧拉方程[参 3(*b*)]。

解： 设在流体中某体元 $d\tau$ 中的流体密度为 ρ，这体元受着 X、Y、Z 的体积力，则式(3-10)可写为

$$\int\rho[(\ddot{x}-X)\dot{x}+(\ddot{y}-Y)\dot{y}+(\ddot{z}-Z)\dot{z}]d\tau=0 \tag{a}$$

令

$$\boldsymbol{u}=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}$$

和

$$\boldsymbol{P}=\rho[(\ddot{x}-X)\boldsymbol{i}+(\ddot{y}-Y)\boldsymbol{j}+(\ddot{z}-Z)\boldsymbol{k}]$$

则式(a)可改写为

$$\int(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u})d\tau=0 \tag{b}$$

体积元内的密度变化由流入该体积元的物质质量来决定。设 $d\tau$ 表面上的面积元表为 $d\boldsymbol{S}$

则

$$\oint\rho\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\int\rho d\tau$$

应用高斯定理，由上式可导出

$$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u})=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

上式在流体力学中称为连续方程。对于不可压缩流体，上式成为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{c}$$

边界的约束条件是“垂直于边界的流体速度为零”，即

$$\boldsymbol{u}_n=0 \tag{d}$$

如令

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A} \tag{e}$$

则式(c)可适合。又令

$$\boldsymbol{A}=\theta\nabla\varphi \tag{f}$$

其中 θ 和 φ 是标量函数，则因 $\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi$ 而有

$$\mathrm{curl}\nabla\varphi=\mathrm{curl}\,\mathrm{grad}\,\varphi=0$$

所以

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A}=\mathrm{curl}(\theta\nabla\varphi)=\nabla\theta\times\nabla\varphi \tag{g}$$

这样，虚速度的流线是曲面 $\theta=$常量与 $\varphi=$常量的交线。因此若选 θ 函数使它在边界面 S 上 $\theta=0$，那么就能保证 $u_n=0$。于是式(b)可写为

$$\int(\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{A})d\tau=0 \tag{h}$$

又因

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{curl}\,\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$$

所以由式(h)可得

$$\int(\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{P})d\tau=\int\mathrm{div}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A})d\tau \tag{i}$$

上式右边积分为零。因为积分后等于($\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}$)在边界 S 上法向分量的积分，而 $\boldsymbol{A}$ 在 S 上为零。

于是式(i)左边的积分亦为零，即

$$\int\theta(\nabla\varphi\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{P})d\tau=0$$

上式对任何 C_2 类 θ 函数都成立，只要它在 S 上为 0。因此有

$$\nabla\varphi\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{P}=0 \tag{j}$$

对整个流体都成立。如取 $\varphi=x$，则式(j)表示$(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{P})_x=0$。同样取 $\varphi=y$ 和 $\varphi=z$，则可知

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{P}=0 \tag{k}$$

从式(k)知道在流体中的空间中的每一点都存在着一个标量函数 p，使

$$\boldsymbol{P}=-\mathrm{grad}\ p \tag{l}$$

即：

$$\left.\begin{aligned}\rho(\ddot{x}-X)&=-\frac{\partial p}{\partial x}\\ \rho(\ddot{y}-Y)&=-\frac{\partial p}{\partial y}\\ \rho(\ddot{z}-Z)&=-\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}$$

上式就是理想流体的欧拉方程，p 是压力函数。

如果 $\Delta\dot{x}_i$ 就是有限速度$\frac{dx}{dt}$，那么第二类基本方程式(3-10)乘以 dt 后可以直接积分得到能量定律。

因为

$$\sum_{i=1}^{3n}(m_i\ddot{x}_i - X_i - X_{ij})dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{3n} d\left(\frac{m_i\dot{x}_i^2}{2}\right) - (X_i + X_{ij})dx_i = 0$$

积分得

$$T = \sum_{i=1}^{3n}\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 = \int(X_i + X_{ij})dx_i \tag{3-11}$$

右边积分是主动力所作的功。

将式(3-10)的括号部分自 t 到 $t+\tau$ 积分,并把 $\Delta\dot{x}_i$ 写成Δu_i,则得

$$\sum_{i=1}^{3n}[m_i(u_i - u_{i0}) - P_i]\Delta u_i = 0 \tag{3-12}$$

其中

$$P_i = \int_t^{t+\tau}(X_i + X_{ij})dt \tag{3-13}$$

是主动力 $X_i + X_{ij}$ 作用于质量的冲量。

式(3-12)可应用于碰撞问题，这是第二种基本方程的重要应用。因为对于碰撞问题，一般 $X_i + X_{ij}$ 很大，作用时间虽为有限量,但仅约千分之几秒,在这样短的时间内，质点系各质点的位置可以认为没有变动，即位移为 0，但速度的改变不为 0,这就是用 $\Delta\dot{x}_i$ 比用虚位移 δx_i 对研究碰撞问题更为优越之处。那时约束方程

$$\sum_{i=1}^{3n}A_{is}\Delta u_i = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, L) \tag{3-14}$$

中的系数 A_{is} 由于是时间 t 和位置坐标 x_i 的函数，而 τ 很小, $t\to t+\tau$ 这段时间,将 A_{is}看成为 t 时的量没有显著误差，这样各 A_{is}

便是常量。于是对于碰撞问题，式(3-12)、(3-14)成为求解代数方程的问题，比一般动力学问题需要解微分方程简便得多了。

例 3-5 有一物体悬挂于O点，它绕O点的转动惯量为J，质心为C，如图 3-4 所示。今有一质量为m的物体，以水平方向的速度v碰撞这悬挂物体，碰撞点K距O为l。求物块碰撞后静止的条件。

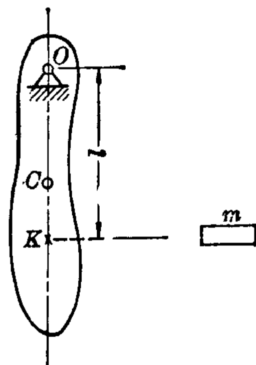


图 3-4

解： 设碰撞后物体速度变成v_t，悬挂物体得角速度为ω，则式(3-12)对这两个物体的碰撞过程为

$$(mv_t - mv - P_{12})\Delta v + (J\omega - P_{21}l)\Delta\dot{\theta} = 0 \qquad (a)$$

其中Δv为物块的速度变量，$\Delta\dot{\theta}$是悬挂物体的角速度变量。式(a)与(3-12)的联系如下：式(a)的第一项中$P_{12} = \int X_{ij}dt$是悬挂物体给物块的冲量；式(a)的第二项来源如下：

$$\Sigma(m_i u_i du_i) - P_{21}\Delta v = \Sigma m_i r_i \omega(r_i \Delta\dot{\theta}) - P_{21}l\Delta\dot{\theta} = (J\omega - P_{21}l)\Delta\dot{\theta}$$

所以式(3-12)成为式(a)。现在

$$P_{12} = \int X_{ij}dt = -\int X_{ji}dt = -P_{21},$$

和$\Delta v = l\Delta\dot{\theta}$，所以式($a$)简化成

$$l(mv - mv_t) = J\omega \qquad (b)$$

式(b)就是对O点的动量矩守恒定理。碰撞过程整个系统的动能可能有损失

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv_t^2\right)$$

动能损失率为

$$\eta = \frac{\Delta E}{\frac{1}{2}mv^2} = 1 - \left[\frac{J}{m}\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_t}{v}\right)^2\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{ml^2}{J}\left(1 - \frac{v_t}{v}\right)^2 + \left(\frac{v_t}{v}\right)^2\right]$$

令$\frac{v_t}{v}=\zeta$和$\frac{ml^2}{J}=K$

则

$$\eta=1-K+2K\zeta-(1+K)\zeta^2,$$

上式在(ζ, η)图上为抛物线，如图 3-5 所示。

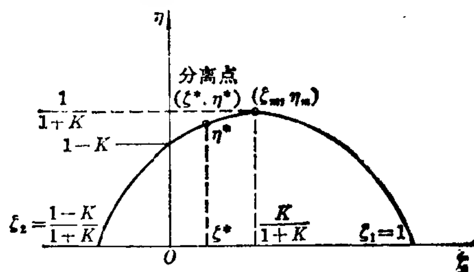


图 3-5

当碰撞开始时，物块速度自v开始减小，这相当于(ζ, η)图上动点自$\zeta_1=1$开始向ζ_2移动。当两者分离时碰撞过程结束，物体速度v_t不再变化，相当于动点静止于ζ^*，它的损失率记为η^*。这损失率由这两物体的物性决定，可能产生塑性变形和弹性变形。后者当碰撞过程结束后可能形成物体本身的振动。若无能源，则$\eta\geqslant0$；不可能$\eta<0$，否则碰撞后动能增加，违反能量守恒原则。

η的极大值点坐标$\zeta_m=\frac{K}{1+K}$，$\eta_m=\frac{1}{1+K}$。因$K>0$，所以$\zeta_m>0$，即ζ_m恒在$\zeta>0$这一边。

随$\zeta_2=-\frac{1-K}{1+K}<0, =0, >0$，亦即随$K<1, =1, >1$而分三种情况如图 3-5 和 3-6$a$、$b$所示。

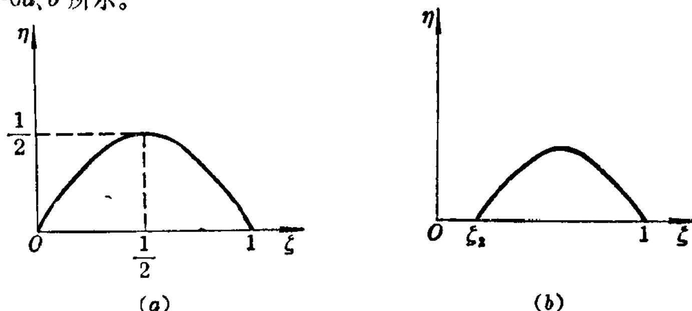


图 3-6

(1) $K<1$，则 $\zeta_2<0$，在 $(0, \zeta_2)$ 之间 $\zeta<0$。所以物块有可能碰撞速度 $v_t<0$。即如果 $\zeta^*<0$，物块发生回跳现象。如果 $\zeta^*=0$，物块正好静止，那时 $\eta=1-K$。如果 $\zeta^*>0$，物块碰后继续前进。

(2) $K=1$，这情况有可能 $\zeta^*=0$，$\eta=0$。此时物体动量全部传递给悬挂物体。

(3) $K>1$，这种情况物体不可能在碰撞后静止。

设悬挂物体的质量是 M，对悬点 O 的回转半径为 r，则物块碰撞后有可能静止的必要条件 $K\leqslant 1$ 是

$$Mr^2\geqslant ml^2 \quad 或 \quad \frac{m}{M}\leqslant\frac{r^2}{l^2}.$$

由于物块碰撞后的速度不可能超过悬挂物体上碰撞点的速度，所以 $v_t\leqslant l\omega$。应用式 (b)，这个关系可写成

$$1\leqslant K\left(\frac{1}{\zeta^*}-1\right)$$

以上关系又可写成

$$\zeta^*\leqslant\frac{K}{1+K}，即\ \zeta^*\leqslant\zeta_m$$

所以物块一定在碰撞达到最大动能损失率 η_m 以后才与悬挂物体分离，分离时 $\eta^*\leqslant\eta_m$。

§3-3 动力学方程的第三种基本型式

设某质点系有约束方程 L 个(含时几何约束亦已并入)，

$$\sum_{s=1}^{3n}A_{rs}\dot{x}_s+A_r=0 \qquad (r=1, 2, \cdots, L)$$

若对任何时候都成立，则将上式对 t 取导数后得

$$\sum_{s=1}^{3n}\left(A_{rs}\ddot{x}_s+\frac{dA_{rs}}{dt}\dot{x}_s\right)+\frac{dA_r}{dt}=0 \qquad (r=1, 2, \cdots, L) \tag{3-15}$$

式中

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3n}\dot{x}_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

现在我们比较两种运动，这两种运动质点的位形和时间 t 以及质点速度都对应相等，只有加速度不相同。一种是 $\ddot{x}$，另一种是 $\ddot{x}+\Delta\ddot{x}$。于是由式(3-15)有

$$\sum_{s=1}^{3n}\left[A_{rs}(\ddot{x}_s+\Delta\ddot{x}_s)+\frac{dA_{rs}}{dt}\dot{x}_s\right]+\frac{dA_r}{dt}=0 \qquad (r=1,2,\cdots,L)$$

与式(3-15)相减得

$$\sum_{s=1}^{3n}A_{rs}\Delta\ddot{x}_s=0 \qquad (r=1,2,\cdots,L) \tag{3-16}$$

于是我们仿§3-2的推导，可得

$$\sum_{s=1}^{3n}(m_s\ddot{x}_s-X_s)\Delta\ddot{x}_s=0 \tag{3-17}$$

上式就是动力学方程的第三种基本类型。

第三种动力学基本方程可以导出高斯最小约束原理和吉普斯—阿佩尔方程，因此在此不再举例说明。

总结以上三种基本方程如下：

第一种基本方程是拉格朗日于1760年引出的，

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{x}_i-X_i)\delta x_i=0 \tag{3-3}$$

式中 δx_i 是无限小虚位移。上式是各种可能运动与真实运动的比较，两者时间和位形相同，而不同的是可能运动具有无限小虚位移 $\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_N$。

第二种基本方程是由乔丹(P. E. B. Jourdain)于1908年引出的

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{x}_i-X_i)\Delta\dot{x}_i=0 \tag{3-10}$$

式中 $\Delta\dot{x}_i$ 可以是无限小也可以是有限值。上式是各种可能运动

与真实运动的比较，两者时间和位形相同，但速度不同。可能运动与真实运动的速度差为 $\Delta\dot{x}_1, \Delta\dot{x}_2, \cdots, \Delta\dot{x}_n$。

第三种基本方程由高斯和吉普斯引入

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i\ddot{x}_i - X_i)\Delta\ddot{x}_i = 0 \tag{3-17}$$

式中 $\Delta\ddot{x}_i$ 可以是无限小，也可以是有限值。上式是各种可能运动与真实运动的比较，两者时间、位形和各质点的相应速度都相同，但是加速度不同。可能运动与真实运动的加速度差为 $\Delta\ddot{x}_1, \Delta\ddot{x}_2, \cdots, \Delta\ddot{x}_n$。

以上三种基本方程都除去了理想约束的影响，如果有摩擦力存在，可视为主动力放入 X_i 中一起讨论。注意，为简便起见，各质点之间的力也已放入 X_i 中。

第四章 完整系统的动力学方程

我们知道，所谓完整力学系统，它只包含"含时几何约束"。当然纯几何约束和可积分的运动约束也包括在含时几何约束以内。本节导出的动力学方程只适用于完整系统。虽然适用范围较狭，但在工程和科学上的价值很大。

（一）拉格朗日第二类方程——广义坐标式动力学方程

§4-1 拉格朗日第二类方程的推导

设某质点系有 n 个质点和 L 个含时几何约束

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{3n}; t) = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, L)$$

则这个系统的自由度为 $N=3n-L$。因此可用 N 个独立变数所谓广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_N$ 来表示动力学方程。可以预先猜想，这样得来的动力学方程的个数较 $3n$ 为少，而且坐标可以按解题的方便自由选取。现在就来推导用广义坐标表示的动力学方程。

设各 x_i 与广义坐标的关系式为

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, \cdots, q_N; t) \qquad (i=1, 2, \cdots, 3n) \tag{4-1}$$

则 x_i 的虚位移，亦即 x_i 的变分为

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (i=1, 2, \cdots, 3n) \tag{4-2}$$

于是动力学普遍方程式(3-3)成为

$$\sum_{i=1}^{3n}(m_i\ddot{x}_i-X_i)\delta x_i=\sum_{i=1}^{3n}(m_i\ddot{x}_i-X_i)\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\delta q_j\sum_{i=1}^{3n}(m_i\ddot{x}_i-X_i)\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{4-3}$$

上式中 $\sum_{i=1}^{3n}X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=Q_j$是对应于 q_j的广义力，这在§2-3中就已经知道，所以现在的主要工作是将式(4-3)中的

$$\sum_{i=1}^{3n}m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

用广义坐标和广义速度来表示，应用微分学知识，显然有

$$\sum_{i=1}^{3n}m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3n}m_i\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{3n}m_i\frac{dx_i}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \tag{4-4}$$

因为

$$\frac{dx_i}{dt}\equiv\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\dot{q}_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_N}\dot{q}_N+\frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{4-5}$$

将上式对 $\dot{q}_j$ 取导数，得

$$\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{4-6}$$

又

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial q_j}\dot{x}_i \tag{4-7}$$

应用式(4-6)和(4-7)，可将式(4-4)改写成

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \tag{4-8}$$

因质点系的总动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i^2$$

所以

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},\quad \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

于是式(4-8)成为

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}$$

式(4-3)成为

$$\sum_{j=1}^{N} \delta q_j\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)=0 \tag{4-9}$$

由于N个q_1、q_2、…、q_j都是独立变数，所以由式(4-9)有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{4-10}$$

上式是力学中最重要的方程，称为拉格朗日方程。

若这个力学系统仅含有势力，那么各Q_j可以由位函数

$$V(q_1, q_2, \cdots, q_N)$$

导出

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{4-11}$$

于是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{4-12}$$

又由于V中不含$\dot{q}_j$，所以$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$。

于是式(4-10)可以改写成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_j}=0 \tag{4-13}$$

令 $T-V=L(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N;\ q_1,q_2,\cdots,q_N;t)$称为拉格朗日函数，或称为动势(Kinetic Potential)。则式(4-13)又可简写成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{4-14}$$

最后尚须说明动能T如何用广义速度和广义坐标来表示。应用式(4-5)有

$$\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n}m_i\dot{x}_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n}m_i\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n}m_i\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k+\\
&+\sum_{i=1}^{3n}m_i\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial t}\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n}m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2=\\
&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{N}b_j\dot{q}_j+C=\\
&=T_2+T_1+T_0
\end{aligned} \tag{4-15}$$

其中T_2、T_1和T_0分别表示广义速度的二次齐函数、一次齐函数和零次齐函数。

若质点系的各式(4-1)都不明显地包含t，这种系统称为平稳系统(Scleronomic system)。对这种系统有

$$\frac{\partial x_i}{\partial t}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,3n)$$

于是 $b_j=c=0$，即 $T_1=T_0=0$，所以

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{4-16}$$

从式(4-16)容易看出

$$a_{jk}=\sum_{i=1}^{3n}m_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=a_{kj}$$

所以矩阵(a_{jk})是对称矩阵。

当质点系的力学系统是平稳系统时，它的动能是广义速度的二次齐函数。

§4-2 广义能量积分

将式(4-12)乘以 $\dot{q}_j$，然后各式相加，得

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial V}{\partial q_j}\dot{q}_j=-\frac{dV}{dt} \tag{4-17}$$

上式末一等式假定V只是位置函数，应用关系式

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

式(4-17)可化成

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)=-\frac{dV}{dt} \tag{4-18}$$

应用数学中关于齐次函数的欧拉定理有

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=$$

$$=2\cdot T_2+1\cdot T_1+0\cdot T_0=2T_2+T_1$$

假定T不明显地含有 t，即$T=T(q_j,\dot{q}_j)$，则$\frac{\partial T}{\partial t}=0$。

故

$$\frac{dT}{dt}=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)$$

于是式(4-18)成为

$$\frac{d}{dt}(2T_2+T_1)-\frac{dT}{dt}+\frac{dV}{dt}=0$$

积分后得

$$2T_2+T_1-T+V=h$$

或

$$T_2-T_0+V=h \tag{4-19}$$

上式称为广义能量积分，或称为雅科毕积分。

注意到$L=T-V$，则式(4-19)与下式相同：

$$\sum_{j=1}^{N}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L=h \tag{4-20}$$

对于平稳系统，式(4-19)成为普通能量积分

$$T+V=h$$

例4-1 单摆。一个质量为m的小球用长为l的细杆(同时讨论细线)悬挂。今将它拉向一边，与铅垂线成φ_0角，然后静止释放，任它摆动。不考虑地球自转，试求其运动方程和积分[参 2(c)]。

解：先讨论用细杆悬挂。这时小球受到双面约束，而沿圆周运动(图 1-1)，因此：

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$V=-mgl\cos\varphi \text{ (以悬点位置作位能标准)}$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$$

得

$$ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}+mgl\sin\varphi=0$$

即

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \tag{4-21}$$

当 $\varphi<5°$ 时，$\sin\varphi\approx\varphi$，上式近似于 $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0$；它的解为

$$\varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t, \text{周期 } \tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

当 $\varphi>5°$时，这是一个非线性微分方程，上式也可以求它的严格解。事实上我们可以直接应用能量积分

$$T+V=h$$

于是

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0\ (=h) \tag{4-22}$$

或

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=\sqrt{\frac{2g}{l}}dt$$

应用 $\cos\varphi=1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}$，上式可化成

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=2\sqrt{\frac{g}{l}}dt$$

将上式自 $t=0$ 至 t 积分，相应的 φ 自 φ_0 至 φ，

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=2\sqrt{\frac{g}{l}}t \tag{4-23}$$

令

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\theta,$$

$$\sin\frac{\varphi_0}{2}=k$$

则

$$\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\theta=k\cos\theta,$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\theta d\theta$$

再改换初始条件，以小球通过最低点作计时起点，于是 $t=0, \theta=0$ 所以式(4-23)变换成

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{g}{l}}t \tag{4-24}$$

上面的积分无法用有限个数的初等函数表示，这积分称为勒上特(Legendre)第一类椭圆积分。这椭圆积分的名称在数学上是由于计算椭圆弧长而导出勒上特第二类椭圆积分

$$\int\sqrt{1-k\sin^2\theta}d\theta$$

所引起的。

当小球自最低点升到最高点 $\varphi=\varphi_0$ 时，θ 自 0 至 $\frac{\pi}{2}$，时间正好经过周期 τ 的四分之一，所以由式(4-24)得周期为

$$\tau = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \tag{4-25}$$

当 k 不太大($k<1$)时，式(4-25)中的求积式分母可用二项定理展开成无限级数，而后逐项求积：

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\theta+\cdots+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}k^{2n}\sin^{2n}\theta+\cdots$$

再用沃利斯(Wallis)积分公式①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta d\theta = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\frac{\pi}{2} \tag{4-26}$$

于是得周期

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\cdots+\left(\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right)^2k^{2n}+\cdots\right] \tag{4-27}$$

从上式看出，当 $k=\sin\frac{\varphi_0}{2}$ 增大时，振幅 φ_0 也增大，由上式周期 τ 也增大。所以

---

① 参看熊庆来，《高等数学分析》，231 页，商务印书馆，1934年。

单摆的周期是随幅角增大而变大的。

如果要求出φ的时间函数，那么由式(4-24)可得解案

$$\sin\theta=\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \tag{4-28}$$

上式的意义可解释如下：式(4-24)的反函数可写为

$$\theta=\mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \tag{4-29}$$

雅科毕称这反函数为$\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$的幅角(Amplitude)，于是

$$\sin\theta=\sin\left[\mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right]$$

雅科毕称之为幅角的正弦(Sine amplitude)。今采用古德曼(Gudermann)符号，简记为

$$\sin\mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)=\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

对于用细杆来悬挂小球的情况，幅角φ_0可以增至π。于是对于$\varphi_0=\pi$，式(4-24)改变初始条件$t=0, \varphi=0$，成为

$$\int_0^{\varphi}\sec\frac{\varphi}{2}d\varphi=2\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

积分得

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\lg\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)$$

当$\varphi\to\pi$时，$t\to\sqrt{\frac{l}{g}}\lg\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}\to\infty$。所以小球升至最高点需要无限长的时间。

我们可以把初始条件改为$t=0$时，小球在最低点有一个初速度v_0，这样总机械能$h=\frac{1}{2}mv_0^2$。当$\frac{1}{2}mv_0^2>2mgl$时，小球将绕悬挂点O作圆周运动。令

$$h=mgl\eta \tag{4-30}$$

则当$-1<\eta<1$时，$l\eta$的意义可认为是小球对悬挂点O的高度差。$\eta>1$时，因小球不能离开圆周，所以η只能当作无量纲的能量系数。于是式(4-22)成为

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2=\frac{g}{l}(\eta+\cos\varphi)=\frac{g}{l}\left(\eta+1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\frac{g(\eta+1)}{l}\left(1-k^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

式中

$$k^2=\frac{2}{1+\eta}。$$

所以

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}}=\sqrt{\frac{2g(\eta+1)}{l}}t$$

解案为

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g(1+\eta)}{2l}}t\right)$$

绕 O 一周的时间可用无限级数逐次求积的方法得到:

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{2(\eta+1)}}\right)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\cdots\right]$$

如果把悬挂用的细杆换以细绳，那么双面约束就变成单面约束。依圆周运动的法线方向分解，得运动方程

$$m\frac{v^2}{l}=-mg\cos\varphi+N$$

如果摆动由静止时 φ_0 产生，将式(4-23)代入上式，

$$N=mg(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)$$

令 $N=0$ 时 $\varphi=\varphi_m$，则

$$\cos\varphi_m=\frac{2}{3}\cos\varphi_0$$

要小球不脱离球面，φ_0 最大为 $90°$，此时 $\varphi_m=90°$。

如果我们在小球最低点给予动能

$$\frac{1}{2}mv^2=mg2l$$

即

$$v=2\sqrt{lg}$$

或

$$\varphi_0=180°$$

于是 $\cos\varphi_m=-\frac{2}{3}$，得 $\varphi_m=131°49'$。所以小球在圆上只能升高到这个角度，此后小球将以速度 v 作抛物运动，如图 4-1 所示。抛物速度 v 可以从下式计

算:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl - \frac{2}{3}mgl$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}gl}$$

此后小球脱离圆周尚可沿抛物线升高$\frac{5}{27}l$。

习题 4-1 若要用细绳悬挂的小球能正好通过最高点，那么在最低点要给予多大的速度？

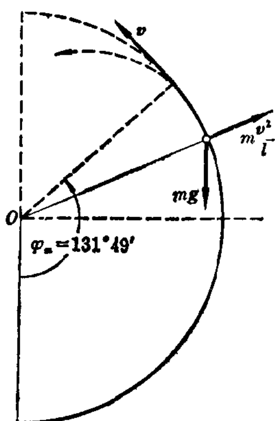


图 4-1

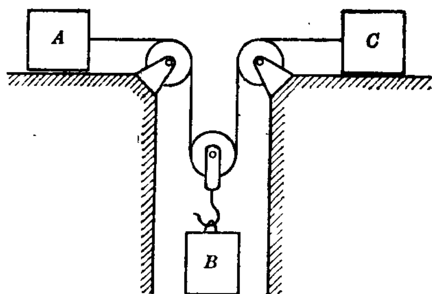


图 4-2

习题 4-2 试用拉格朗日方程导出用弹簧悬挂一物块的摆的动力学方程(略去空气阻力)。

例 4-2 如图 4-2 所示滑轮中，三物块 A、B、C 分别重 $P_A = 10$ kg、$P_B = 20$ kg、$P_C = 20$ kg。物块与地面间的动摩擦系数均为 $f' = 0.2$，求各重物的加速度。

解: 设物块 A、B、C 在某时 t 的速度为 v_A、v_B、v_C，它们的位移为 q_A、q_B、q_C，则

$$v_B = \frac{v_A + v_C}{2},\quad q_B = \frac{q_A + q_C}{2}$$

B 的位能

$$V_B = -P_B\frac{q_A + q_C}{2}$$

作用于 A 的力 $Q_A=-0.2\,P_A$. 作用于 C 的力 $Q_C=-0.2\,P_C$, 总动能

$$T=\frac{1}{2g}\left[P_A v_A^2+P_C v_C^2+P_B\left(\frac{v_A+v_C}{2}\right)^2\right]$$

$$L=T-V_B$$

这系统有两个自由度, 以 q_A、q_C 为广义坐标, 则拉格朗日方程为:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_A}-\frac{\partial L}{\partial q_A}=Q_A, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_C}-\frac{\partial L}{\partial q_C}=Q_C$$

即:

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_a}{g}w_A+\frac{P_b}{4g}(w_A+w_C)=\frac{P_B}{2}-0.2\,P_A\\ \frac{P_c}{g}w_C+\frac{P_b}{4g}(w_A+w_C)=\frac{P_B}{2}-0.2\,P_C\end{aligned}\right\}$$

代入数值得:

$$\left.\begin{aligned}15w_A+5w_C=8g\\ 5w_A+25w_C=6g\end{aligned}\right\}$$

解得:

$$w_C=1.4\ \text{m/s}^2, \qquad w_A=4.76\ \text{m/s}^2,$$

$$w_B=\frac{w_A+w_C}{2}=3.08\ \text{m/s}^2$$

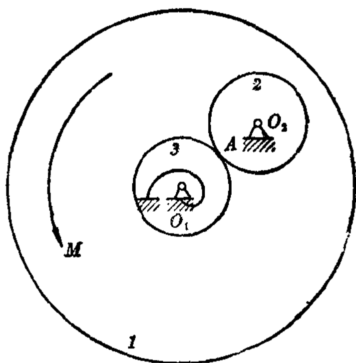


图 4-3

例 4-3 如图 4-3 所示, 飞轮*1*在不变力矩 M 作用下绕铅垂轴 O_1 转动。飞轮上带有齿轮 *2* 的转动轴 O_2, 齿轮 *2* 与齿轮*3* 啮合, 齿轮 *3* 则可以和飞轮无关地绕同一轴转动。齿轮 *3* 的转动受到图上所表示出的螺旋弹簧盘的阻碍, 该弹簧的反作用力矩与齿轮 *3* 的转角 ψ 成正比例, 等于 $c\psi$。设两齿轮均为均质圆盘, 半径同为 a, 质量同为 m; 飞轮对于 O_1 轴的转动惯量为 $20\,ma^2$; 最初该系统处在静止状态, 求该系统的运动。

解: 令飞轮 *1* 的转角为 φ, 齿轮 *3* 的转角为 ψ, 则:

飞轮 *1* 的动能可表示为$T_1=\frac{1}{2}(20\,ma^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$

齿轮 *3* 的动能可表示为$T_3=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}a^2\right)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$

齿轮 *2* 的运动为平面平行运动, 它的质心速度为 $2a\dot{\varphi}$, 它与齿轮 *3* 的接触点 A 的速度为 $a\dot{\psi}$。所以齿轮 *2* 的转动角速度为

$$\omega_2=(2a\dot{\varphi}-a\dot{\psi})/a=2\dot{\varphi}-\dot{\psi}$$

于是齿轮 2 的平动动能为

$$\frac{1}{2}m(2a\dot{\varphi})^2$$

对质心的转动动能为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)(2\dot{\varphi}-\dot{\psi})^2$$

齿轮 2 的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}m(2a\dot{\varphi})^2+\frac{1}{4}ma^2(2\dot{\varphi}-\dot{\psi})^2$$

总动能

$$T=T_1+T_2+T_3=ma^2\left(13\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\dot{\psi}^2-\dot{\varphi}\dot{\psi}\right)$$

于是拉格朗日方程为:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}&=M\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}-\frac{\partial T}{\partial\psi}&=-c\psi\end{aligned}\right\}\text{成为}\left.\begin{aligned}ma^2(26\ddot{\varphi}-\ddot{\psi})&=M\\ ma^2(-\ddot{\psi}+\ddot{\varphi})&=-c\psi\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

先消去 $\ddot{\varphi}$ 得

$$\ddot{\psi}+\frac{26c}{25ma^2}\psi=\frac{M}{25ma^2}$$

应用初始条件 $t=0,\ \psi=0,\ \dot{\psi}=0$. 易知上式的解为

$$\psi=\frac{M}{26c}\left(1-\cos\frac{\sqrt{26}}{5}\sqrt{\frac{c}{ma^2}}t\right)$$

将上式代入式(a)的第一式得

$$\ddot{\varphi}=\frac{M}{26ma^2}+\frac{M}{26ma^2\times25}\cos\frac{\sqrt{26}}{5}\sqrt{\frac{c}{ma^2}}t$$

上式经二次积分, 并考虑 $t=0$ 时 $\dot{\varphi}=0,\ \varphi=0$, 得

$$\varphi=\frac{M}{52ma^2}t^2+\frac{M}{626c}\left(1-\cos1.02\sqrt{\frac{c}{ma^2}}t\right)$$

例 4-4 质量为 m 的质点在一半径为 a 的圆周上运动, 此圆又以等角速度 ω 绕其铅垂直径 AB 转动, 如图 4-4 所示。求此质点的运动微分方程和使角速度 ω 保持不变的力矩 M。

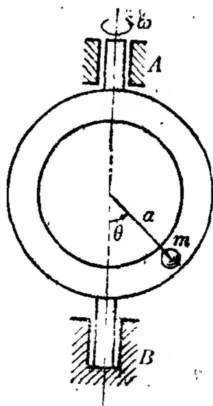


图 4-4

解: 设圆环的转动惯量为 J, 则其动能

$$T_1=\frac{1}{2}J\omega^2$$

质点对环的相对速度为 $a\dot{\theta}$，牵连速度为 $a\omega\sin\theta$，所以质点的动能为

$$T_2=\frac{1}{2}m(a\sin\theta)^2\omega^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

总动能

$$T=\frac{1}{2}(J+ma^2\sin^2\theta)\omega^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

$$V=a(1-\cos\theta)mg-M\varphi \quad (\dot{\varphi}=\omega)$$

于是对 θ 和 φ 的拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial\theta}+\frac{\partial V}{\partial\theta}=0$$

和

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\omega}-\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$$

得

$$ma^2\ddot{\theta}-ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mag\sin\theta=0$$

和

$$(J+ma^2\sin^2\theta)\dot{\omega}+ma^2\omega 2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}=$$
$$=M$$

所谓 ω 不变，就是 $\dot{\omega}=0$。故由上式得使 ω 不变的力矩

$$M=ma^2\omega\dot{\theta}\sin 2\theta$$

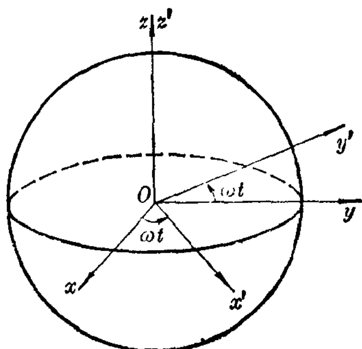


图 4-5

例 4-5 求人造地球卫星的广义能量积分。略去大气的阻力和地球非中心力的影响，知道人造地球卫星的轨道是以地心为焦点的一个椭圆，它的轨道平面对惯性空间坐标系($Oxyz$)(以遥远的恒星为标记)来说是不变的，它的机械能是守恒的。但是我们人是站在转动着的地球上的，固定于地球上以地心 O 为原点的坐标系为 $Ox'y'z'$。将 Oz'、Oz 与地球自转轴重合，如图 4-5 所示，则有坐标变换式：

$$\left.\begin{aligned}x&=x'\cos\omega t-y'\sin\omega t\\y&=x'\sin\omega t+y'\cos\omega t\\z&=z'\end{aligned}\right\} \tag{4-31}$$

将上式对时间取导数，得：

$$
\left.\begin{aligned}
v_x &= v'_x\cos\omega t - v'_y\sin\omega t - \omega x'\sin\omega t - y'\omega\cos\omega t \\
v_y &= v'_x\sin\omega t + v'_y\cos\omega t + \omega x'\cos\omega t - y'\omega\sin\omega t \\
v_z &= v'_z
\end{aligned}\right\} \tag{4-32}
$$

将上式代入人造地球卫星在惯性坐标系的动能表示式

$$
T=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)
$$

求得:

$$
\left.\begin{aligned}
T'_2 &= \frac{1}{2}m(v'^2_x+v'^2_y+v'^2_z) \\
T'_1 &= m(x'v'_y-y'v'_x)\omega \\
T'_0 &= \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2+y'^2)
\end{aligned}\right\} \tag{4-33}
$$

从上式看出，虽然坐标系变换式(4-31)是时间 t 的函数，但是转动坐标系的动能 $T'=T'_2+T'_1+T'_0$ 并不明显地包含时间，因此存在着广义能量积分

$$
T'_2-T'_0+V=h
$$

$$
\frac{1}{2}m(V'^2_x+V'^2_y+V'^2_z)-\frac{1}{2}m\omega^2(x'^2+y'^2)+V(x',y',z')=h \tag{4-34}
$$

现在说明上式的物理意义：转动坐标系的拉格朗日函数

$$
L'=T'-V'=\frac{1}{2}m(v'^2_x+v'^2_y+v'^2_z)+m(x'v'_y-y'v'_x)\omega+
$$

$$
+\frac{1}{2}m\omega^2(x'^2+y'^2)-V'
$$

代入拉格朗日方程:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial v'_x}-\frac{\partial L'}{\partial x'}=0, \quad m(\ddot{x}'-2\omega\dot{y}'-\omega^2x')=-\frac{\partial V'}{\partial x'}\equiv X' \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial v'_y}-\frac{\partial L'}{\partial y'}=0, \quad m(\ddot{y}'+2\omega\dot{x}'-\omega^2y')=-\frac{\partial V'}{\partial y'}\equiv Y' \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial v'_z}-\frac{\partial L'}{\partial z'}=0, \quad m\ddot{z}'=-\frac{\partial V'}{\partial z'}=Z'
\end{aligned}\right\} \tag{4-35}
$$

式中 X'、Y'、Z' 是地球作用于人造地球卫星的引力在转动坐标轴方向上的分力。

将三式顺次乘以沿转动坐标轴 x'、y'、z' 的单位矢量 i'、j'、k'，然后相加得

$$
m\boldsymbol{w}'-m2\omega(\dot{y}'\boldsymbol{i}'-\dot{x}'\boldsymbol{j}')-m\omega^2(x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}')=\boldsymbol{F}' \tag{4-36}
$$

式中 $\boldsymbol{w}'=\ddot{x}'\boldsymbol{i}'+\ddot{y}'\boldsymbol{j}'+\ddot{z}'\boldsymbol{k}$ 是静止于地球上的观察者测定的人造地球卫星的加速度(相对加速度)；$m\omega^2(x'\boldsymbol{i}'+y'\boldsymbol{j}')$ 是人造地球卫星在某瞬时由于地球自转而表现的惯性离心力 $\boldsymbol{F}_r$；人造地球卫星至地轴的垂直距离为 $\rho=\sqrt{x'^2+y'^2}$；如图 4-6 所示；

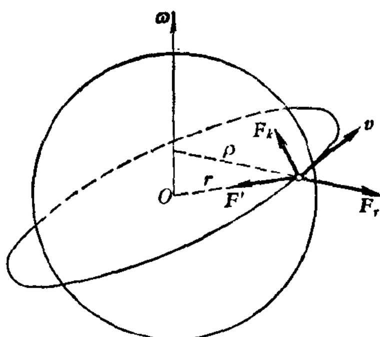


图 4-6

$$2\omega(\dot{y}'\boldsymbol{i}'-\dot{x}'\boldsymbol{j}')=2\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}'\\ 0 & 0 & \omega\\ V'_x & V'_y & V'_z\end{vmatrix}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'$$

是人造地球卫星的哥氏加速度。所以式(4-36)左边第二项改变符号就表示哥氏惯性力 $\boldsymbol{F}_k$。这样式(4-36)就是转动坐标系的牛顿方程

$$m\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{F}_r+\boldsymbol{F}_k$$

由于:

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{2}m\omega^2(x'^2+y'^2)\right]=m\omega^2x'=X_r$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{1}{2}m\omega^2(x'^2+y'^2)\right]=m\omega^2y'=Y_r$$

所以 $-\frac{1}{2}m\omega^2(x'^2+y'^2)$ 可以看作为惯性离心力的势函数。由于 $\boldsymbol{F}_k$ 恒与 $\boldsymbol{v}'$ 垂直，所以 $\boldsymbol{F}_k$ 对人造地球卫星不作功。这就是为什么 T_1 这项不出现在式(4-34)的原因。式(4-34)的物理意义是把离心力造成的势能计算在内，那么式(4-34)就是转动坐标系中的能量守恒定律。

§4-3 多自由度保守系统的微振动[参 3(c)]

所谓保守系统，它的作用力 Q_i 都可以从势函数 $V(q_1, q_2, \cdots,$

q_N)导出:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \qquad (i=1, 2, \cdots, N)$$

应用多变数泰勒定理将V在它的平衡点附近用级数展开得

$$V = V_0(q_{10}, q_{20}, \cdots, q_{N0}) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 (q_i - q_{i0}) +$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}^{N}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 (q_i - q_{i0})(q_j - q_{j0}) + \cdots$$

我们定V的标准值$V_0(q_{10}, q_{20}, \cdots, q_{N0}) = 0$,并且以$q_{i0}=0$作为$q_i$的起点,那么上式可写成

$$V = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 q_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j}^{N}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 q_i q_j +$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}^{N}\frac{\partial^3 V}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} q_i q_j q_k$$

但标准点为平衡点,所以$\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 = -Q_{i0} = 0$。又因为我们研究的是微振动,$q_i$、$q_j$、$q_k$都很小,这样略去$q_i q_j q_k$及高次项得

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{N}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j}\right)_0 q_i q_j$$

记$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \, \partial q_j}\right)_0 = b_{ij}$。则上式可简写为

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{N} b_{ij} q_i q_j \tag{4-37}$$

又我们现在研究的是平稳系统,按式(4-16)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{N} a_{ij}\dot{q}_i \dot{q}_j \tag{4-16}$$

将以上两式代入N个自由度的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, N)$$

得到N个自由度的保守平稳系统在平衡位置附近的微振动方程①

$$a_{i1}\ddot{q}_1+a_{i2}\ddot{q}_2+\cdots+a_{iN}\ddot{q}_N=-b_{i1}q_1-b_{i2}q_2\cdots-b_{iN}q_N$$

$$(i=1, 2, \cdots, N) \qquad (4\text{-}38)$$

上式可缩写成矩阵式:

$$A\ddot{\boldsymbol{q}}=-B\boldsymbol{q} \qquad (4\text{-}39)$$

式中:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN} \end{pmatrix}$$

用非奇异线性变换,不需要解任何方程,便可以把表示动能或势能的两个二次形式中的一个变换成为平方和的形式，也就是把矩阵A或B化成对角矩阵的形式。

若把动能式变换成平方和,同时势能式变换成另一个二次式,即有:

$$\left.\begin{aligned} 2T&=\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2+\cdots+\dot{\xi}_N^2 \\ 2V&=\sum_{i,j}^{N}c_{ij}\xi_i\xi_j \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}40)$$

代入以ξ_i为广义坐标的拉格朗日方程得

$$\ddot{\xi}_i=-c_{i1}\xi_1-c_{i2}\xi_2-\cdots-c_{iN}\xi_N\ (i=1, 2, \cdots, N) \qquad (4\text{-}41)$$

---

① “平衡位置附近”的含意是在q_{i0}附近的一切点q_i都有$q_i\approx q_{i0}$,因此$a_{ij}(q)\approx a_{ij}(q_0)=$常量，于是$\frac{\partial T}{\partial q_i}=0$。

上列微振动方程的形式称为正形式

如将势能式变换为平方和，即：

$$\left.\begin{aligned} 2T & \sum_{ij}^{N} e_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j \\ 2V &= \sum_{i=1}^{N} \eta_i^2 \end{aligned}\right\} \tag{4-42}$$

则

$$\eta_i = -e_{i1}\ddot{\eta}_1 - e_{i2}\ddot{\eta}_2 \cdots - e_{iN}\ddot{\eta}_N \quad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{4-43}$$

上列微振动方程的形式称为反形式

不但如此，只要T和V的式(4-37)和(4-36)中任一个是正定的，我们就可以找到一种变换能同时把它们化成平方和的形式。事实上动能T总是正定的，对于稳定平衡点附近V也是正定的，设经线性变换

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} K_{ij}\xi_j \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{4-44}$$

变换后有

$$\left.\begin{aligned} 2T &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \dot{\xi}_i^2 \\ 2V &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_i^2 \xi_i^2 \end{aligned}\right\} \tag{4-45}$$

对于这样的T、V，代入以ξ_i为广义坐标的拉格朗日方程得

$$\ddot{\xi}_i + p_i^2 \xi_i = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{4-46}$$

从上式看出我们已把式(4-38)变数混合的方程，经过变换可以把它们的变数全部分离了。这样，每个ξ_i都可以从式(4-46)单独求解。设$t=0$的初始条件是$\xi_{i0}=\alpha_i$，$\dot{\xi}_{i0}=\beta_i$，那么式(4-46)的解可写为

$$\xi_i=\alpha_i\cos p_i t+\left(\frac{\beta_i}{p_i}\right)\sin p_i t=A_i\sin(p_i t+\varphi_i)$$

$$(i=1,2,\cdots,N) \tag{4-47}$$

式中 A_i 为振幅，φ_i 为相角，p_i 为振动频率。如上式的 ξ_i 共有 N 个，ξ_1、ξ_2、…、ξ_N 称为正则坐标(Canonical coordinates) 也叫主坐标。由于它们都是相互独立的，所以可以某个 ξ_i 在振动状态，而其余的 $\xi_j(j\neq i)=0$，这样各个 q 的振动状态由变换式 (4-44) 有

$$q_s=K_{si}A_i\sin(p_i t+\varphi_i) \qquad (s=1,2,\cdots,N)$$

这样仅由一个正则坐标的变化来决定的振动称为固有振动，对应的频率 p_i 称为固有频率(Natural frequency)。N个自由度的体系有N个固有频率。一般N自由度体系在其稳定平衡位置的微振动，由式(4-44)可知是N个固有振动的线性组合：

$$q_s=\sum_{i=1}^{N}K_{si}A_i\sin(p_i t+\varphi_i) \qquad (s=1,2,\cdots,N)$$

N个固有频率 p_1、p_2、…、p_N 中的最小的一个称为最低频率。对应于它的振型称为基频振型(Fundamental mode)。

如果我们已经得到了正形式的振动方程式(4-41)而要求出它的特解，我们可用式(4-47)代入式(4-41)，得到

$$p_i^2 A_i=\sum_{j=1}^{N}c_{ij}A_j \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4-48}$$

要上式 A_i 的齐次方程组有不为 0 的解，它们的系数行列式必须为 0，即

$$\Delta(p^2)\equiv\begin{vmatrix} c_{11}-p^2 & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22}-p^2 & \cdots & c_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN}-p^2 \end{vmatrix}\equiv 0 \tag{4-49}$$

上式是 p^2 的 N 次代数方程，这方程是用来计算频率 p 的，称为频率方程或久期方程 (Secular equation)。后者这个名称是从天体力学中得来的。

如果把式(4-47)代入反形式式(4-43)，则可以得到反形式的久期方程

$$\begin{vmatrix} e_{11}-\frac{1}{p^2} & e_{12}, & \cdots & e_{1N} \\ e_{21} & e_{22}-\frac{1}{p^2} & \cdots & e_{2N} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ e_{N1} & e_{N2} & \cdots & e_{NN}-\frac{1}{p^2} \end{vmatrix}=0 \qquad (4\text{-}50)$$

同样把式(4-47)代入一般线性自由振动的微振动方程式 (4-38)中，可以得到 A_i 的齐次方程

$$\sum_{j=1}^{N}(a_{ij}p^2-b_{ij})A_j=0 \qquad (i=1,2,\cdots,N) \qquad (4\text{-}51)$$

它有非零解的条件是系数行列式必须为 0，即它的久期方程为

$$\begin{vmatrix} a_{11}p^2-b_{11} & a_{12}p^2-b_{12} & \cdots\cdots & a_{1N}p^2-b_{1N} \\ a_{21}p^2-b_{21} & a_{22}p^2-b_{22} & \cdots\cdots & a_{2N}p^2-b_{2N} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{N1}p^2-b_{N1} & a_{N2}p^2-b_{N2} & \cdots\cdots & a_{NN}p^2-b_{NN} \end{vmatrix} \equiv |Ap^2-B|$$

$$\doteq 0 \qquad (4\text{-}52)$$

上式也是 p^2 的 N 次代数方程。下面将证明当 A、B 为正定的对称矩阵时这些久期方程的根全部是正实数①。我们称这些根为久期方程的特征值(Eigenvalue)，它的平方根的正值就是固有频率 p。为简单起见，我们仅讨论各个 p_i 都不相等的情况。

由式(4-52)解出 p^2，得到它的任一根 p_i^2，则把它代入式(4-51)

---

① 西尔威斯特(Sylvester)定理，1852 年。

可以得到一组齐次方程的比值 $A_{i1}:A_{i2}:A_{i3}\cdots:A_{iN}$。其中足标 i 表示对应于 p_i^2 的一组振幅 A。假定系数矩阵的秩为 $N-1$，即上述行列式 $\Delta(p_i^2)$ 至少有一个 $N-1$ 阶子行列式不为 0。设式(4-52)的 $a_{NN}p_i^2-b_{NN}$ 的相余子式 $\Delta_{NN}(p_i^2)$ 不为 0，则除去式(4-51)最后一式的 $N-1$ 个线性方程可以解出 A_{i1}、A_{i2}、…、A_{iN-1}，得到

$$A_{ij}=A_{iN}\frac{\Delta_{Nj}(p_i^2)}{\Delta_{NN}(p_i^2)}\qquad(j=1,2,\cdots,N-1)$$

或

$$A_{i1}:A_{i2}:A_{i3}\cdots:A_{iN}=\Delta_{N1}(p_i^2):\Delta_{N2}(p_i^2)\cdots:\Delta_{NN}(p_i^2)\qquad(4\text{-}53)$$

我们称

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix}A_{i1}\\A_{i2}\\\vdots\\A_{iN}\end{bmatrix}$$ 为对应于特征值 p_i^2 的特征矢量(Eigenvector)

设

$$A_{i1}^2+A_{i2}^2+\cdots+A_{iN}^2=l_i^2$$

则

$$\left(\frac{A_{i1}}{l_i}\right)^2+\left(\frac{A_{i2}}{l_i}\right)^2+\cdots+\left(\frac{A_{iN}}{l_i}\right)^2=1$$

于是 $\frac{A_{i1}}{l_i}$、$\frac{A_{i2}}{l_i}$、…、$\frac{A_{iN}}{l_i}$ 组成的矢量 $\frac{\boldsymbol{A}_i}{l_i}$ 就成为单位矢量，这样经过常数 l_i 除以后的矢量称为已经归一化(Normalization)。对应于 N 个 p_1^2、p_2^2、…、p_N^2，就有 N 个特征矢 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、…、$\boldsymbol{A}_N$。应用特征矢，式(4-51)可以改写成矩阵式

$$(Ap^2-B)\boldsymbol{A}=0\qquad(4\text{-}54)$$

对应于 p_i^2 和 p_j^2 的特征矢 $\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{A}_j$ 有

$$\left.\begin{aligned}(Ap_i^2-B)\boldsymbol{A}_i=0\\(Ap_j^2-B)\boldsymbol{A}_j=0\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}55)$$

我们称“行和列互换以后得来的矩阵”为原矩阵的转置矩阵。将矩阵 A、B 的转置矩阵分别用符号 $\tilde{A}$、$\tilde{B}$ 表示，那么 A、B 是对称矩阵的条件可写为

$$\tilde{A}=A \quad \text{和} \quad \tilde{B}=B$$

又

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i=(A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{iN})$$

将式(4-55)的前一式左乘以 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_j$，应用 $\widetilde{(ABC)}=\tilde{C}\tilde{B}\tilde{A}$ 关系式，则有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_j\,\widetilde{(Ap_i^2-B)\boldsymbol{A}_i}=\widetilde{\boldsymbol{A}}_i(Ap_i^2-B)\boldsymbol{A}_j=0$$

将式(4-55)的后一式左乘以 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 得

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i(Ap_j^2-B)\boldsymbol{A}_j=0$$

将两式相减得

$$(p_i^2-p_j^2)\widetilde{\boldsymbol{A}}_iA\boldsymbol{A}_j=0$$

因 $p_i^2\neq p_j^2$，所以必定

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_iA\boldsymbol{A}_j=0 \tag{4-56}$$

这样两个特征值不相等的特征矢量 $\boldsymbol{A}_i$、$\boldsymbol{A}_j$ 都有上面的重要特性，我们称它为正交性(Orthogonality)。

如果矩阵 A 为单位矩阵 I，此时

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_iI\boldsymbol{A}_j=(A_{1i}, A_{2i}\cdots A_{Ni})\begin{pmatrix}A_{j1}\\A_{j2}\\\vdots\\A_{jN}\end{pmatrix}=$$

$$=A_{1i}A_{j1}+A_{2i}A_{j2}+\cdots+A_{Ni}A_{jN}=0$$

这与矢量 $\boldsymbol{A}_i\perp\boldsymbol{A}_j$ 的几何意义相符合。因此特征值都不相同的 N 个特征矢 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$、…、$\boldsymbol{A}_N$ 组成一个正交坐标系。任何一个广义坐标矢量 $\boldsymbol{q}_i$ 都可以沿这些坐标轴分解，式(4-44)成为

$$\boldsymbol{q}_i=\sum_{j=1}^{N}K_{ij}\boldsymbol{A}_j\sin(p_jt+\varphi_j)\ (i=1, 2, \cdots, N) \tag{4-57}$$

即一个N自由度线性振动体系的任何振动形式都可以按它固有振动形式分解。

现在证明对称矩阵A和B组成的久期方程的根一定都是正实根的结论。

设p_α^2为式(4-52)的一个根，$\boldsymbol{A}_\alpha$为对应于它的特征矢，则有

$$(Ap_\alpha^2-B)\boldsymbol{A}_\alpha=0$$

将上式左乘以$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha$，得

$$p_\alpha^2(\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha A\boldsymbol{A}_\alpha)=\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha B\boldsymbol{A}_\alpha \tag{4-58}$$

现在要证明$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha A\boldsymbol{A}_\alpha>0$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha B\boldsymbol{A}_\alpha>0$.

若p_α^2是复数，对应的$\boldsymbol{A}_\alpha$也是一个复数矢量$\boldsymbol{A}_\alpha=\boldsymbol{u}_\alpha+i\boldsymbol{v}_\alpha$，则

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha A\boldsymbol{A}_\alpha=(\boldsymbol{u}_\alpha-i\boldsymbol{v}_\alpha)A(\boldsymbol{u}_\alpha+i\boldsymbol{v}_\alpha)=$$

$$=\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha A\boldsymbol{u}_\alpha-i\widetilde{\boldsymbol{v}}_\alpha A\boldsymbol{u}_\alpha+i\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha A\boldsymbol{v}_\alpha+\widetilde{\boldsymbol{v}}_\alpha A\boldsymbol{v}_\alpha$$

因为A是对称矩阵，所以$\widetilde{\boldsymbol{v}}_\alpha A\boldsymbol{u}_\alpha=\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha A\boldsymbol{v}_\alpha$，于是虚数矢部分为0，所以$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha A\boldsymbol{A}_\alpha=\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha A\boldsymbol{u}_\alpha+\widetilde{\boldsymbol{v}}_\alpha A\boldsymbol{v}_\alpha$是个实数。又因$\boldsymbol{A}_\alpha\neq0$，所以$\boldsymbol{u}_\alpha$或$\boldsymbol{v}_\alpha$至少有一个不等于0。又由于$A$是正定的，所以$\widetilde{\boldsymbol{u}}_\alpha A\boldsymbol{u}_\alpha>0$或$\widetilde{\boldsymbol{v}}_\alpha A\boldsymbol{v}_\alpha>0$至少有一个成立，于是$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha A\boldsymbol{A}_\alpha>0$。同样对于正定的$B$亦有$\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha B\boldsymbol{A}_\alpha>0$。于是由式(4-58)解得

$$p_\alpha^2=\frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha B\boldsymbol{A}_\alpha}{\widetilde{\boldsymbol{A}}_\alpha A\boldsymbol{A}_\alpha}>0$$

即p_α^2是正实数。

例4-6 设有长为$4a$的细绳系着质量为m、$\frac{4}{3}m$、m的三个质点，绳的两端拉紧后被固定着，三个质点的位置正好四等分细绳，$\frac{4}{3}m$质量的质点在中间，求这三质点的微振动。

解：设三个质点的位移分别为x_1、x_2、x_3，则三个质点的总动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\frac{4}{3}\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right)$$

绳的张力为P,则四段绳子张力的总位能可近似地写为

$$V=\frac{P}{2a}\{x_1^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+x_3^2\}$$

于是代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{\partial V}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,3)$$

并令$\frac{P}{2ma}=n^2$,得:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}_1+2n^2(2x_1-x_2)=0\\&\frac{4}{3}\ddot{x}_2+2n^2(-x_1+2x_2-x_3)=0\\&\ddot{x}_3+2n^2(-x_2+2x_3)=0\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

正则坐标关系式为

$$\frac{\ddot{\xi}_1}{\xi_1}=\frac{\ddot{\xi}_2}{\xi_2}=\frac{\ddot{\xi}_3}{\xi_3}=-p^2$$

把上式代入式(a)得齐次方程:

$$\left.\begin{aligned}(p^2-4n^2)\xi_1+2n^2\xi_2&=0\\2n^2\xi_1+\left(\frac{4}{3}p^2-4n^2\right)\xi_2+2n^2\xi_3&=0\\2n^2\xi_2+(p^2-4n^2)\xi_3&=0\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

久期方程为

$$\begin{vmatrix}p^2-4n^2 & 2n^2 & 0\\2n^2 & \frac{4}{3}p^2-4n^2 & 2n^2\\0 & 2n^2 & p^2-4n^2\end{vmatrix}=0$$

解得:

$$p_1^2=n^2,\quad p_2^2=4n^2,\quad p_3^2=6n^2$$

以$p_1^2=n^2$代入式(b)得:

$$\left.\begin{aligned}-3\xi_1+2\xi_2&=0\\3\xi_1-4\xi_2+3\xi_3&=0\\2\xi_2-3\xi_3&=0\end{aligned}\right\}$$

解得

$$\frac{\xi_1}{2}=\frac{\xi_2}{3}=\frac{\xi_3}{2}$$

为一组振动固有振型。同样由$p^2=4n^2$和$p^2=6n^2$可解得另两组固有振型:

$$\frac{\xi_1}{1}=\frac{\xi_2}{0}=\frac{\xi_3}{-1},\quad \frac{\xi_1}{1}=\frac{\xi_2}{-1}=\frac{\xi_3}{1}$$

由此可作出固有振型的三幅图线如图 4-7 所示。

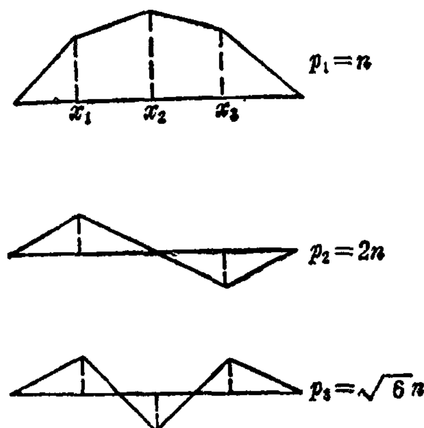


图 4-7

从上面看出 $p_2=2n$ 出现一个节点，$p_3=\sqrt{6}n$ 出现两个节点，这些节点在整个振动过程中保持静止。

一般坐标 x_1、x_2、x_3 与正则坐标 ξ_1、ξ_2、ξ_3 的关系式为：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=2\xi_1+\xi_2+\xi_3\\x_2&=3\xi_1-\xi_3\\x_3&=2\xi_1-\xi_2+\xi_3\end{aligned}\right\}\text{和}\quad\left.\begin{aligned}\xi_1&=\frac{1}{10}(x_1+2x_2+x_3)\\\xi_2&=\frac{1}{2}(x_1-x_3)\\\xi_3&=\frac{1}{10}(3x_1-4x_2+3x_3)\end{aligned}\right\}$$

如果起初 $t=0$ 时质点在平衡位置，$x_{10}=x_{20}=x_{30}=0$。给第一个质点一个冲量使它得到动量 mu。则 $t=0$ 时初速为

$$\dot{x}_{10}=u,\quad \dot{x}_{20}=0,\quad \dot{x}_{30}=0$$

于是

$$\xi_{10}=\xi_{20}=\xi_{30}=0,\quad \dot{\xi}_{10}=\frac{1}{10}u,\quad \dot{\xi}_{20}=\frac{u}{2},\quad \dot{\xi}_{30}=\frac{3}{10}u$$

故得固有振动：

$$\xi_1=\frac{u}{10p_1}\sin p_1t,\quad \xi_2=\frac{5u}{10p_2}\sin p_2t,\quad \xi_3=\frac{3u}{10p_3}\sin p_3t$$

从而最后得：

$$x_1=\frac{u}{10}\left(\frac{2}{n}\sin nt+\frac{5}{2n}\sin 2nt+\frac{3}{\sqrt{6}\,n}\sin\sqrt{6}\,nt\right)$$

$$x_2=\frac{3u}{10}\left(\frac{1}{n}\sin nt-\frac{1}{\sqrt{6}\,n}\sin\sqrt{6}\,nt\right)$$

$$x_3=\frac{u}{10}\left(\frac{2}{n}\sin nt-\frac{5}{2n}\sin 2nt+\frac{3}{\sqrt{6}\,n}\sin\sqrt{6}\,nt\right)$$

式中

$$n=\sqrt{\frac{P}{2ma}}$$

例 4-7 讨论汽车的振动[参 4]。把整个汽车看成为一个刚体，那么汽车的六个自由度：向前平动、横向平动和绕铅垂轴转动是由驾驶员操纵的，因此不加考虑；留下汽车上下振动、绕纵轴的滚动和绕水平横轴的颠簸振动三种运动，因此动能可写为

$$T=\frac{m}{2}\dot{y}^2+\frac{I}{2}\dot{\psi}^2+\frac{J}{2}\dot{\theta}^2$$

式中 m 为汽车的质量，y 为汽车质心 G 离地面的高度；ψ 是颠簸角，I 是汽车围绕 G 的横轴的转动惯量；θ 是滚动角，J 是滚动转动惯量。

设前轮轴心 A_1 与 G 的水平距离为 l_1，后轮轴心 A_2 与 G 的水平距离为 l_2，如图 4-8 所示。则 A_1 点高度为 $y+l_1\psi$，A_2 点高度 $y-l_2\psi$。设前轴弹簧系数为 k_1，后轴弹簧系数为 k_2，侧滚的恢复系数为 k_3，则势函数为

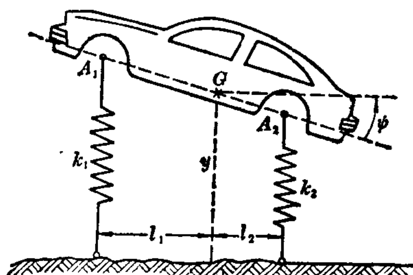


图 4-8

$$V=\frac{k_1}{2}(y+l_1\psi)^2+\frac{k_2}{2}(y-l_2\psi)^2+\frac{k_3}{2}\theta^2$$

将 $T-V=L$ 代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}-\frac{\partial L}{\partial\psi}=0$$

得：

$$\left.\begin{aligned}&J\ddot{\theta}+k_3\theta=0\\&m\ddot{y}+(k_1+k_2)y+(k_1l_1-k_2l_2)\psi=0\\&(k_1l_1-k_2l_2)y+I\ddot{\psi}+(k_1l_1^2+k_2l_2^2)\psi=0\end{aligned}\right\}$$

上面第一式只包含 θ, 而其余两式则不包含 θ, 所以第一式可以分离出来独立求解。因此我们现在只讨论第二和第三两式。这两式的久期方程显然为

$$\begin{vmatrix}k_1+k_2-m\omega^2 & k_1l_1-k_2l_2\\ k_1l_1-k_2l_2 & k_1l_1^2+k_2l_2^2-I\omega^2\end{vmatrix}=0$$

或

$$(k_1l_1^2+k_2l_2^2-I\omega^2)(k_1+k_2-m\omega^2)-(k_1l_1-k_2l_2)^2=0 \qquad (a)$$

从上看出, 如果

$$k_1l_1=k_2l_2$$

那么升降振动和颠簸振动各自独立进行, 不加耦合。这时, 两者单独振动的频率为:

$$\omega_1^2=\frac{k_1l_1^2+k_2l_2^2}{I},\quad \omega_2^2=\frac{k_1+k_2}{m}$$

令

$$\frac{(k_1l_1-k_2l_2)^2}{Im}=\lambda^2\omega_1^2\omega_2^2$$

则式(a)成为

$$(\omega_1^2-\omega^2)(\omega_2^2-\omega^2)-\lambda^2\omega_1^2\omega_2^2=0$$

即

$$\omega^4-\omega^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+(1-\lambda^2)\omega_1^2\omega_2^2=0$$

于是得到两个谐振频率为

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1^2\\\Omega_2^2\end{aligned}\right\}=\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\pm\sqrt{\frac{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}{4}+\lambda^2\omega_1^2\omega_2^2}$$

由上式可看出 Ω_1^2 和 Ω_2^2 在区间 (ω_2^2, ω_1^2) 之外。为了满足广大乘客在生理上的要求, 经大量测试的统计资料指出, 汽车的振动频率最好能在 $1.3\frac{1}{秒}$ 附近。为此制造汽车时, 先设法符合“去耦合”(Decoupling)条件: $k_1l_1=k_2l_2$; 再设法使 $\omega_1=\omega_2$, 即

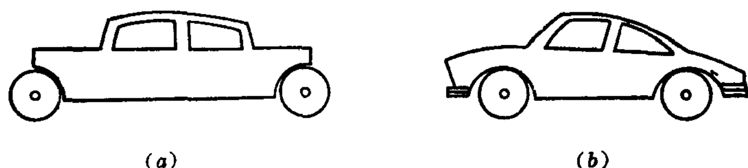
$$\frac{k_1l_1^2+k_2l_2^2}{I}=\frac{k_1+k_2}{m}$$

令汽车绕质心 G 的回转半径为 ρ, 即 $m\rho^2=I$, 则由上式并结合 $k_1l_1=k_2l_2$, 可

得

$$\rho^2 = l_1 l_2$$

即汽车的回转半径ρ应该等于质心G到两轴距离l_1、l_2的几何平均值$\sqrt{l_1 l_2}$。在1935年以前制造的汽车并没有考虑到这个条件，它的式样如图4-9a所示。1935年以后设计的汽车就大致附合这个条件，并且振动频率接近于$1.3\frac{1}{秒}$，式样如图4-9b所示。



(a) (b)

图 4-9

§4-4 含耗散函数的拉格朗日方程和有阻尼的线性振动系统[参 5(a)]

在气体和液体中运动的物体受到这些可流动介质的阻力，是一个相当复杂的问题。阻力可以分成四类（1）接触面的摩擦力，（2）流体介质粘滞性产生的阻力，（3）运动物体尾部形成的涡旋而产生的阻力，（4）由运动物体发射到周围介质的波动而产生的阻力。

每一种阻力都是运动物体的动能减少而向周围介质散逸，最后化为热能。这种阻力与运动方向相反，而它的大小是速度的函数。一般阻力可以写成

$$R = -ckf(v)$$

式中k是与流体性质和物体尺寸大小有关的物理量；c是阻力系数，是由物体的大小、外形和可能与物体速度有关的数值因子。

如果速度不太大，实验证明阻力与速度的一次方成正比，即$R = -kv$。现在就依这种最简单而又重要的情况来建立质点系在

流动介质中的运动的拉格朗日方程。要导出这种方程当然要从牛顿第二定律的基本方程开始:

$$m_i\ddot{x}_i=-k_i\dot{x}_i+X_i \qquad (i=1,2,\cdots,3n) \qquad (4\text{-}59)$$

式中 X_i 是作用于质点 m_i 上的除了介质阻力以外的力的合力沿 x_i 坐标轴的分量。在 §4-1 推导拉格朗日方程式(4-11) 的过程中力 X_i 变换成广义力 Q_j:

$$Q_j=\sum_{i=1}^{3n}X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

现在多了一个阻尼力 $-k_i\dot{x}_i$，也只要施以同样的变换成为广义阻力

$$R_j=-\sum_{i=1}^{3n}k_i\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=-\sum_{i=1}^{3n}k_i\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=-\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\sum_{i=1}^{3n}\frac{1}{2}k_i\dot{x}_i^2\right]$$

所以雷利(Rayleigh)引入下列函数:

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n}k_i\dot{x}_i^2 \qquad (4\text{-}60)$$

称为耗散函数(Dissipation-function)。于是含有耗散函数的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j=1,2,\cdots,N) \qquad (4\text{-}61)$$

现在再说明耗散函数的物理意义：假定研究的力学系统是平稳系统，那么动能是广义速度的二次齐函数。将式(4-61)两边乘以 $\dot{q}_j$，然后对 N 个方程求总和得

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{N}Q_j\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j \qquad (4\text{-}62)$$

上式左边可化成

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)=\frac{d}{dt}(2T)-\frac{dT}{dt}=\frac{dT}{dt}$$

再假定 Q_j 为有势力，即$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$，和对式(4-62)末一式应用欧拉齐次函数定理有

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=2F$$

则

$$\sum_{j=1}^{N}Q_j\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial V}{\partial q_j}\dot{q}_j-2F=-\frac{dV}{dt}-2F$$

所以式(4-62)变成

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{dV}{dt}-2F \quad 或 \quad \frac{d}{dt}(T+V)=-2F$$

上式表示 $2F$ 就等于这个力学系统的机械能损失率的绝对值。

下面讨论具有线性阻尼的多自由度微振动系统。设系统是平稳的，即约束方程都不包含时间，此时动能可写为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{N}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{4-17}$$

又设广义力都是有势的，且

$$V=\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{N}b_{ij}q_iq_j \tag{4-37}$$

和耗散函数式(4-60)经变换成广义速度时为

$$F=\frac{1}{2}\sum_{ij=1}^{N}c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{4-63}$$

式中 c_{ij} 大都满足对称条件

$$c_{ij}=c_{ji}$$

则将T、V、F代入式(4-61)得

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ij}\ddot{q}_i+c_{ij}\dot{q}_i+b_{ij}q_i)=0 \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{4-64}$$

上式是广义坐标q_1、q_2、…、q_N的联立微分方程组。要解这组方程可令

$$q_i=A_ie^{pt} \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4-65}$$

将式(4-65)代入式(4-64)后成为

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ij}p^2+c_{ij}p+b_{ij})A_i=0 \tag{4-66}$$

上式成为A_1、A_2、…、A_N的齐次线性联立代数方程组，要它存在全部的A_i不同为0的解，下列行列式的值必须为0：

$$|a_{ij}p^2+c_{ij}p+b_{ij}|=0; \tag{4-67}$$

将这行列式展开后，可以得到p的$2N$次代数方程。现在得到的代数方程与$c_{ij}=0$得到的频率方程的一个重要区别是式(4-67)的根不再一定是正实根，可以有复数根。当p_k是实数时，得到一组实数比：

$$A_{k1},\ A_{k2},\ \cdots,\ A_{kN}$$

当p_k是一对共轭复根$p_k=\alpha_k+i\beta_k$、$\bar{p}_k=\alpha_k-i\beta_k$时，得到一对共轭复根比组：

$$A_{kh}=P_{kh}+iQ_{kh},\ \bar{A}_{kh}=P_{kh}-iQ_{kh} \quad (h=1,2,\cdots,N)$$

对于实根p，我们将式(4-66)的第一式乘以A_1，第二式乘以A_2，……，末一式乘以A_N，然后相加得到

$$p^2T(A)+pF(A)+V(A)=0 \tag{4-68}$$

式中$T(A)$、$F(A)$、$V(A)$表示式(4-16)的T、式(4-37)的V、式(4-63)的F的各$\dot{q}$，q都代以足标相同的A而成。由于(a_{ij})、(b_{ij})、(c_{ij})是实数对称矩阵，所以$T(A)$、$F(A)$、$V(A)$都是正数①，于是可

① 对于系统不断减少能量的阻尼力，F是正定的。[参 9]233 页。

以知道式(4-68)的实根 p 一定是负数，从而对应的解式(4-65)

$$q_i = A_i e^{-|p|t}$$

当 $t\to\infty$ 时，$q_i\to 0$。如果所有式(4-68)的根都是负实数，那么整个系统并不产生振动而将渐渐趋近于平衡位置。

若 p、A 为复数，设为 $A=P+iQ$，则将式(4-66)的第一式乘以 A_1 的共轭复数 $\bar{A}_1$，第二式乘以 $\bar{A}_2$……，末一式乘以 $\bar{A}_N$，然后相加得

$$p^2T(A\bar{A})+pF(A\bar{A})+V(A\bar{A})=0 \tag{4-69}$$

式中

$$\begin{aligned}2T(A\bar{A}) &= a_{11}A_1\bar{A}_1+\cdots+a_{NN}A_N\bar{A}_N+a_{12}(A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2)+\cdots+= \\ &= a_{11}(P_1^2+Q_1^2)+\cdots+a_{NN}(P_N^2+Q_N^2)+a_{12}[2P_1P_2+ \\ &\qquad +2Q_1Q_2]+\cdots+= \\ &= (a_{11}P_1^2+\cdots+a_{NN}P_N^2+2a_{12}P_1P_2+\cdots+)+ \\ &\qquad +(a_{11}Q_1^2+\cdots+a_{NN}Q_N^2+2a_{12}Q_1Q_2+\cdots+)= \\ &= 2T(P)+2T(Q)\end{aligned}$$

同样

$$2F(A\bar{A})=2[F(P)+F(Q)],\quad 2V(A\bar{A})=2[V(P)+V(Q)]$$

于是式(4-69)成为

$$p^2[T(P)+T(Q)]+p[F(p)+F(Q)]+[V(P)+V(Q)]=0$$

显然当 $p=\alpha+i\beta$ 适合上式时，$\bar{p}=\alpha-i\beta$ 亦适合上式。因此：

$$p+\bar{p}=-\frac{F(P)+F(Q)}{T(P)+T(Q)},\qquad p\bar{p}=\frac{V(P)+V(Q)}{T(P)+T(Q)}$$

即：

$$2\alpha=-\frac{F(P)+F(Q)}{T(P)+T(Q)},\qquad \alpha^2+\beta^2=\frac{V(P)+V(Q)}{T(P)+T(Q)}$$

由上面第一式看出复数的实数部分是负数，因此一对复数根 p，$\bar{p}$ 将形成似

$$q_k=e^{-(\alpha)t}(b_k\cos\beta t+c_k\sin\beta t) \tag{4-70}$$

的振动部分，而当 $t\to\infty$ 时有 $q_k\to 0$。

§4-5 碰撞问题的拉格朗日方程

现在直接由拉格朗日方程式(4-11)来求碰撞问题的方程。设质点系为N个自由度，它的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,2,\cdots,N) \qquad (4\text{-}12)$$

将上式乘以dt，然后对碰撞时间 Δt 积分得

$$\int_0^{\Delta t} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\int_0^{\Delta t}\frac{\partial T}{\partial q_i}dt=\int_0^{\Delta t} Q_i dt \quad (i=1,2,\cdots,N) \qquad (4\text{-}71)$$

而

$$\int_0^{\Delta t} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right|_{t=\Delta t}-\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right|_{t=0}$$

当 $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$时，$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=mv_x$ 是质点的动量；当$T=\frac{1}{2}J\omega^2$ 时，$\frac{\partial T}{\partial \omega}=J\omega$是动量矩。一般情况下，我们称$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$为广义动量，以 p 表示。又$\frac{\partial T}{\partial q_i}$是个有限量，设它在碰撞时间$(0,\Delta t)$内，$\left|\frac{\partial T}{\partial q_i}\right|$的最大值为$M$。则由中值定理，$\int_0^{\Delta t}\frac{\partial T}{\partial q_i}dt\leqslant\int_0^{\Delta t}\left|\frac{\partial T}{\partial q_i}\right|dt=M\Delta t$ 与$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)_{\Delta t}-\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)_0$比较为可略。$\int_0^{\Delta t} Q_i\Delta t$ 是广义力 Q_i 对质点系的广义冲量，表示为ϑ_i，则式(4-71)成为

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right|_{t=\Delta t}-\left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right|_{t=0}=\int_0^{\Delta t} Q_i dt \quad (i=1,2,\cdots,N) \qquad (4\text{-}72a)$$

或

$$p_{i\Delta t}-p_{i0}=\vartheta_i \quad (i=1,2,\cdots,N) \qquad (4\text{-}72b)$$

上式就是我们要求的碰撞问题的拉格朗日方程。

例 2-15 设有一登月舱着落在斜山坡上，以速度 v_z 和 v_x 与月面碰撞，

如图 4-10 所示。如果登月舱碰撞点是硬石块，碰后登月舱绕此点转动。x、y、z 坐标如图示，x 和 y 轴水平。求碰后瞬时的角速度[参 8(a)]。

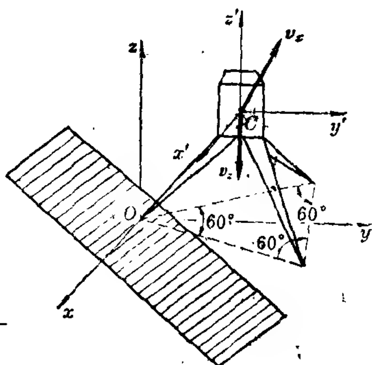


图 4-10

解： 设登月舱的总质量为 m，则登月舱的总动能表示式为

$$T=\frac{1}{2}(\omega_x^2I'_x+\omega_y^2I'_y+\omega_z^2I'_z-$$

$$-2\omega_x\omega_yI'_{xy}-2\omega_y\omega_zI'_{yz}-2\omega_z\omega_xI'_{zx})+$$

$$+\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$$

式中前面部分为绕其质心 C 的转动动能，后面部分为质点的平移动能。

其中 $Oy'z'$ 为过 C 点的对称面。所以 $I'_{xy}=I'_{zx}=0$。碰前 $v'_{yO}=0$，碰撞点 O 对 C 的坐标是 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$，其中 $\bar{x}=0$。因此碰后质心速度

$$v_{xt}\boldsymbol{i}+v_{yt}\boldsymbol{j}+v_{zt}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & \bar{y} & \bar{z}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\end{vmatrix}=(\bar{y}\omega_z-\bar{z}\omega_y)\boldsymbol{i}+\bar{z}\omega_x\boldsymbol{j}-\bar{y}\omega_x\boldsymbol{k}$$

本题中，$N=6$。T 对 v_x、v_y、v_z 的偏导数为：

$$m[v_{xt}-v_{x0}]=\vartheta_x \tag{a}$$

$$m[v_{yt}]=\vartheta_y \tag{b}$$

$$m[v_{zt}-v_{z0}]=\vartheta_z \tag{c}$$

式中 ϑ_x、ϑ_y、ϑ_z 表示沿 x'、y'、z' 轴的冲量，由此产生对 C 点的冲量矩为

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & \bar{y} & \bar{z}\\ \vartheta_x & \vartheta_y & \vartheta_z\end{vmatrix}=(\bar{y}\vartheta_z-\bar{z}\vartheta_y)\boldsymbol{i}+\bar{z}\vartheta_x\boldsymbol{j}-\bar{y}\vartheta_x\boldsymbol{k}$$

于是另三个转动碰撞方程为：

$$\frac{\partial T}{\partial\omega_x}:\ \omega_xI'_x=\bar{y}\vartheta_z-\bar{z}\vartheta_y$$

$$\frac{\partial T}{\partial\omega_y}:\ \omega_yI'_y-\omega_zI'_{yz}=\bar{z}\vartheta_x$$

$$\frac{\partial T}{\partial\omega_z}:\ -\omega_yI'_{yz}+\omega_zI'_z=-\bar{y}\vartheta_x$$

即：
$$\omega_xI'_x=m[-\bar{y}\omega_x-v_{zO}]\bar{y}-\bar{z}m\bar{z}\omega_x$$

$$\omega_y I'_y - \omega_z I'_{yz} = \bar{z} m[\bar{y}\omega_z - \bar{z}\omega_y - v_{xO}]$$
$$-\omega_y I'_{yz} + \omega_z I'_z = -\bar{y} m[\bar{y}\omega_z - \bar{z}\omega_y - v_{xO}]$$

亦即:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_x[I'_x + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)] = -m\bar{y}v_{zO} \\ &\omega_y(I'_y + m\bar{z}^2) - \omega_z(I'_{yz} + m\bar{z}\bar{y}) = -m\bar{z}v_{xO} \\ &-\omega_y(I'_{yz} + m\bar{y}\bar{z}) + \omega_z(I'_z + m\bar{y}^2) = m\bar{y}v_{xO} \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

如今应用平行移轴公式，将各 I 平行移到 O 点，并令:

$$I_x = I'_x + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2), \quad I_y = I'_y + m\bar{z}^2,$$
$$I_z = I'_z + m\bar{y}^2, \qquad I_{yz} = I'_{yz} + m\bar{y}\bar{z}$$

则式(d)可写为:

$$\left.\begin{aligned} &I_x\omega_x = -m\bar{y}v_{zO} \\ &I_y\omega_y - \omega_z I_{yz} = -m\bar{z}v_{xO} \\ &-\omega_y I_{yz} + \omega_z I_z = m\bar{y}v_{xO} \end{aligned}\right\}$$

解得:

$$\omega_x = -\frac{m\bar{y}v_{zO}}{I_x}$$

$$\omega_y = \frac{m(\bar{y}I_{yz} - \bar{z}I_z)}{I_yI_z - I_{yz}^2}v_{xO}$$

$$\omega_z = \frac{m(\bar{y}I_y - \bar{z}I_{yz})}{I_yI_z - I_{yz}^2}v_{xO}$$

§4-6 含速度矢势的拉格朗日方程——带电粒子在电磁场中的运动方程

万有引力场的位能仅是质点位置的函数，但是带电粒子在电磁场中，它的势函数却与粒子的速度有关[参 7]。

设有包含速度的势函数 $V(q_1, q_2, \cdots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N; t)$，简写为 $V(q, \dot{q}, t)$。如果广义力 Q_j 可写为

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{4-73}$$

则拉格朗日方程式(4-10)可写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

令 $L=T-V$，则上式仍化成拉格朗日方程式(4-14)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \tag{4-14}$$

在电场强度为 $\boldsymbol{E}$、磁场强度为 $\boldsymbol{H}$ 的电磁场中，有下面四个场方程联系着(马克斯韦尔电磁场方程)(Maxwell's electromagnetic field equations)：

$$\text{curl}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{4-74}$$

$$\text{curl}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=0 \tag{4-75}$$

$$\text{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho \tag{4-76}$$

$$\text{div}\boldsymbol{H}=0 \tag{4-77}$$

式中 ρ 是产生电场 $\boldsymbol{E}$ 的电荷密度，$\boldsymbol{j}$ 是电流密度。由于式(4-77)，可令

$$\boldsymbol{H}=\text{curl}\boldsymbol{A} \tag{4-78}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 称为矢量势(Vector potential)。将上式代入式(4-75)得

$$\text{curl}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0$$

于是可令

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla V \tag{4-79}$$

因标势 V 有 $\nabla V=\text{grad}V$ 和 $\text{curl}\,\text{grad}\,V=0$.

在上述电磁场中带电荷 e 的粒子，如果它的速度为 $\boldsymbol{v}$，那么电磁场对于它的作用力为

$$\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \tag{4-80}$$

这力称为洛伦茨(Lorentz)力。将式(4-78)的 $\boldsymbol{H}$ 和式(4-79)的 $\boldsymbol{E}$ 代入上式得

$$F=e\left[-\nabla V-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{c}v\times(\nabla\times A)\right]= \qquad \text{(附录 IV)}$$

$$=e\left[-\nabla V-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{c}\left\{\nabla(v\cdot A)-v\cdot\nabla A\right\}\right] \tag{4-81}$$

因

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+v\cdot\nabla A$$

所以式(4-81)又可改写为

$$F=e\left[-\nabla V-\frac{1}{c}\frac{dA}{dt}+\frac{1}{c}\nabla(v\cdot A)\right] \tag{4-82}$$

上式的 x 分量为

$$F_x=e\left[-\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}(v\cdot A)\right]$$

如令

$$U=eV-\frac{e}{c}v\cdot A \tag{4-83}$$

则

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{e}{c}A_x\right)-\left[e\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x}(v\cdot A)\right]=F_x$$

对于 y、z 分量有与上式相类似的表示式。因此带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数 L 可用下式表示：

$$L=T-eV+\frac{e}{c}v\cdot A \tag{4-84}$$

式中 V 为标势，A 为矢势，T 为带电粒子的动能。

（二）哈密顿正则方程——广义动量式动力学方程

§4-7　哈密顿正则方程的推导

我们在上述的碰撞问题中，提出了一个重要的定义——广义动量 p：

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad 或 \quad p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{4-85}$$

因为 $L=T-V$，而 V 不是广义速度 $\dot{q}_i$ 的函数。

由式(4-15)，T 是广义速度 $\dot{q}$ 的二次函数，所以

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{k=1}^{N} a_{ki}\dot{q}_k+b_i \quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4-86}$$

下面证明上式 $\dot{q}_k$ 的系数行列式不等于 0：

$$|a_{ki}|\not\equiv 0$$

现在采用反证法。若 $|a_{ki}|\equiv 0$，则

$$\sum_{k=1}^{N} a_{ki}\dot{q}_k=0$$

有不全等于 0 的 $\dot{q}_i$ 解，但是

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{k=1}^{N} a_{ki}\dot{q}_k$$

根据欧拉齐次函数定理有

$$2T_2=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a_{ki}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

所以当$|a_{ki}|=0$时，有一组不全为零的$(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N)$使$T_2=0$。但是$T_2$总是正的[①]，只有在各$\dot{q}_i$都等于零的情况下，才等于零。由此可知$|a_{ki}|\neq 0$，于是我们可由式(4-86)解出$\dot{q}_k(k=1, 2, \cdots, N)$，

$$\dot{q}_k=f_k(q_1, q_2, \cdots, q_N; p_1, p_2, \cdots, p_N; t)\ (k=1, 2, \cdots, N) \quad (4\text{-}87)$$

我们知道拉格朗日函数为

$$L=T-V=\sum_{i,k}^{N} a_{ki}\dot{q}_i\dot{q}_k+\sum_{i=1}^{N} b_i\dot{q}_i+c-V(q_1, q_2, \cdots, q_N)=$$

$$=L(\dot{q}, q, t)$$

式中a_{ki}、b_i、c可能是(t, q)的函数。

设各q_i和$\dot{q}_i$都产生变分δq_i和$\delta\dot{q}_i$，那么函数$L(\dot{q}, q, t)$也将得到一个变分如下：

$$\delta L=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \quad (4\text{-}88)$$

现在引入的变分δ符号，它是个无限小增量，它的数学性质和微分d类似，但是有个重要差别是它的变更无需经过时间。例如$L(\dot{q}, q, t)$的微分应该写为

$$dL=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}dt \quad (4\text{-}89)$$

将式(4-88)与(4-89)比较，看出δL不包含时间t的变化项，因此变分在力学上的性质与虚位移相同，而采用同一符号。

应用恒等式

$$\Sigma\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i=\delta\left(\Sigma\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)-\Sigma\dot{q}_i\delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \quad (4\text{-}90)$$

式(4-88)可改写为

---

① 因为T_2是系统的不平稳约束被“凝固”时的动能。

$$\delta\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \Sigma \dot{q}_i \delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \qquad (4\text{-}91)$$

但从拉格朗日方程式(4-14)有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}(p_i) = \dot{p}_i$$

于是式(4-91)可写成

$$\delta\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\sum_i \dot{p}_i \delta q_i + \sum_i \dot{q}_i \delta p_i \qquad (4\text{-}92)$$

函数$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$是变数$(q, \dot{q}, t)$的函数，将所有$\dot{q}$全部用式(4-87)代换成$p$，这样得到一个$(q, p, t)$的函数，即有

$$H(q, p, t) = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)_{\dot{q}\to p} \qquad (4\text{-}93)$$

于是H的变分为

$$\delta H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i$$

比较上式与式(4-92)中δq_i和δp_i的系数，得：

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \qquad (4\text{-}94)$$

上式就是我们要求的保守系统的哈密顿方程，称为正则方程(Canonical equation)。

如果力学系统的广义力含有保守力$-\frac{\partial V}{\partial q_i}$和非保守力$Q_i$两部分，那么这力学系统的拉格朗日方程可写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i$$

即

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

经过同样的推导，可以得到非保守系统的正则方程：

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}+Q_i\qquad (i=1,2,\cdots,N)\quad (4\text{-}95)$$

虽然式(4-95)适用的范围比式(4-94)更广，但是它丧失了式(4-94)所特有的对称形式。这对称性是正则方程在力学理论上研究能得成功的重要特征。

现在来看哈密顿函数H的力学意义：

因

$$L=T-V=T_2+T_1+T_0-V$$

将L依$\dot{q}$的二次齐函数L_2、一次齐函数L_1、0次齐函数L_0分解，则

$$L=L_2+L_1+L_0$$

所以：

$$L_2=T_2,\quad L_1=T_1,\quad L_0=T_0-V$$

应用欧拉齐次函数定理

$$\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i=\sum_i\frac{\partial L_2}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L_0}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i=$$

$$=2L_2+1\cdot L_1+0\cdot L_0=2L_2+L_1$$

所以

$$H=\left(\Sigma\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)=2L_2+L_1-(L_2+L_1+L_0)=$$

$$=L_2-L_0=T_2-T_0+V\qquad (4\text{-}96)$$

由上式可见，H一般就是广义能量表达式。

对于平稳力学系统，动能$T=T_2$，$T_0=0$，所以式(4-96)简化成

$$H=T+V\qquad (4\text{-}97)$$

所以对于平稳系统，哈密顿函数就是质点的机械能表达式。

当然我们可以利用正则方程式(4-94)[或(4-95)]来推导一个

力学问题的动力学方程，然后解这个力学问题。应用时，首先要应用式(4-96)[或(4-97)]求出H函数，而且我们在用正则方程以前必须把T_2用广义动量p表示，否则无法求出$\frac{\partial H}{\partial p_i}$。可是从力学问题求得的动能表示式总是为各广义速度$\dot{q}_i$的函数，因此，求得了$T$，还需要从式(4-88)解联立方程得到各$\dot{q}_i$用$p_1$、$p_2$、…、$p_N$表示的表示式，再代入$H$函数中去，化成$H(q, p, t)$。只有这样的$H$函数，才能用正则方程来推导所求力学问题的动力学方程。由此看来，用哈密顿正则方程来建立动力学方程比用拉格朗日第二类方程麻烦多了。但是正则方程有另一方面的优点，尤其是进行理论性方面的研究。

对于一个N自由度的完整系统来说，拉格朗日方程是N个q_i $(i=1, 2, \cdots, N)$的N个二阶微分方程组，而正则方程是$2N$个变数$(q_1, q_2, \cdots q_N; p_1, p_2, \cdots, p_N)$的$2N$个一阶微分方程组，两者都只适用于完整系统。正则方程对于保守系统有重要应用，下面是从正则方程比拉格朗日方程更优越的情况加以讨论。

§4-8 用相空间来研究完整系统的力学问题

从式(4-94)看出，正则方程对于一对变数q_i、p_i有明显的对称性，虽然有一个负号的差别，但是这是显露了力学问题的一个重要特性。因此我们称q_i、p_i这一对变数为共轭动力学变数(Conjugate dynamical variables)。这样以$2N$个变数$(q_1, q_2, \cdots, q_N;\ p_1, p_2, \cdots, p_N)$组成的空间，称为相空间(Phase space)。由于对整个力学系统的运动可用这$2N$个变数来描述，所以我们可以用相空间中一点来表示某力学系统的运动状态。这个点称为代表点(Representative point)。当时间变化时，由于质点系运动，这个动点也在相空间中运动，它在相空间中描画出的一条曲线称为相迹。

这个曲线方程应用式(4-94)可以写成

$$\frac{dq_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}}=\frac{dq_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}}=\cdots=\frac{dq_N}{\frac{\partial H}{\partial p_N}}=\frac{dp_1}{-\frac{\partial H}{\partial q_1}}=\frac{dp_2}{-\frac{\partial H}{\partial q_2}}=\cdots=\frac{dp_N}{-\frac{\partial H}{\partial q_N}}=dt \quad (4\text{-}98)$$

把上式中的 q、p 用统一符号 x 表示，则上式在数学上等同于

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_m}{X_m}=dt \qquad (m=2N) \qquad (4\text{-}99)$$

式中 $X_r=X_r(x_1, x_2, \cdots, x_m; t)$。

除非这个力学系统的运动方程是可以变数分离的（详见后面），否则要在二维空间的纸上，作出完满的多维相空间曲线是没有办法的。但是一个自由度的力学系统 $2N=2$，正好可以完全画出。所以非线性振动理论中，对于一个自由度的振动系统，相平面得到了很成功的应用，因为这时相迹方程式(4-98)成为

$$\frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}=\frac{dp}{-\frac{\partial H}{\partial q}} \qquad (4\text{-}100)$$

当 $\frac{\partial H}{\partial p}\neq 0$, $\frac{\partial H}{\partial q}\neq 0$ 时，上式可改写为

$$\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial p}dp=0$$

对平稳系统 H 不显含 t，所以

$$dH=\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial p}dp=0$$

积分上式得

$$H(q, p)=C \qquad (4\text{-}101)$$

所以一个自由度的保守系统，它的相迹可由哈密顿函数令它等于常量得到。

如果 $\frac{\partial H}{\partial p}=0$, $\frac{\partial H}{\partial q}=0$，则在相空间中同时适合这两式的点不存在，这些点称为奇点。现在以前面曾讨论过的单摆为例，作为二维

相空间的一个应用。

例 4-9 求用细杆悬挂的单摆的相迹[参 3(*d*)]。

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2,\quad V=-mgl\cos\varphi$$

以 $q=\varphi$，则

$$p=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}$$

所以

$$H=\frac{p^2}{2ml^2}-mgl\cos\varphi=mgl\eta$$

或

$$p=\pm\sqrt{2}\,ml^2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\cos\varphi+\eta}\tag{a}$$

若 $\eta<-1$，那么 p 成虚数，这种情况只有质点 m 脱离了细杆的约束才有可能，所以 $\eta<-1$ 不存在相迹。现在以 η 自 -1 增大加以讨论。

(1) $\eta=-1$　只存在 $\cos\varphi=1$ 一种情况，此时 $p=0$，所以 $\varphi=0$、$\pm2\pi$、$\pm4\pi$、…是平衡点。在相平面中是涡点。

(2) $-1<\eta<-1+\delta\eta$　$\delta\eta$ 系微小值，所以 φ 很小，此时式(2-39)成为 $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0$。所以 $\varphi=\varphi_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$ 在平衡点附近作简谐振动

$$p=ml^2\dot{\varphi}=-ml^2\varphi_0\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

将这两式平方并用 $\cos^2\sqrt{\frac{g}{l}}t+\sin^2\sqrt{\frac{g}{l}}t=1$ 消去 t，得相迹为

$$\frac{p^2}{m^2l^3g\varphi_0^2}+\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}=1$$

所以相迹是包围平衡点的一些椭圆。

(3) $-1<\eta<1$　对于这区间内任意常数 η 的相迹，可由式(*a*)在区间 $|\cos\varphi|<\eta$ 算得为一包围上述椭圆的一条封闭曲线。所以质点以平衡点为对称点作往复运动，如图 4-11 中的曲线 C_1。

(4) $\eta=1$　由式(*a*)，

$$p=\pm\sqrt{2}\,ml^2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1+\cos\varphi}=\pm\,2ml^2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\frac{\varphi}{2}$$

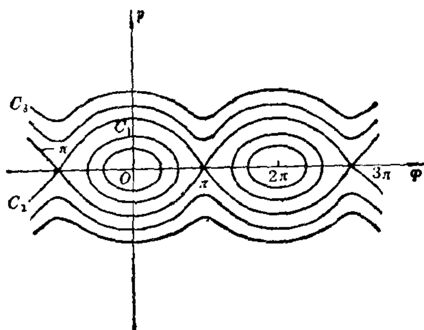


图 4-11

所以相迹是一条$\frac{\varphi}{2}$的余弦的曲线，如图中曲线 C_2。它与 $p=0$ 的交点 $\varphi=$ $=\pm\pi$、$\pm 3\pi$、…，称为鞍点(Saddle point)。

(5) $\eta>1$　应用式(a)可作出曲线 C_3，它表示质点绕悬点作旋转运动。η 越大，曲线越远离 φ 轴。本题奇点位置由

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{ml^2}=0,\quad \frac{\partial H}{\partial \varphi}=mgl\sin\varphi=0$$

解得奇点($\varphi=\pm n\pi$, $p=0$)。

$P=0$；$\varphi=0$、$\pm 2\pi$、$\pm 4\pi\cdots$ 的奇点是涡点。

$P=0$；$\varphi=\pm\pi$、$\pm 3\pi$、…的奇点是鞍点，如(4)所述。

由于 $p=ml^2\dot{\varphi}$，所以相平面也可以用(φ, $\dot{\varphi}$)表示。对于质点作直线运动，$p=m\dot{x}$，则相平面可以用(x, $\dot{x}$)表示。关于相平面中奇点的类型参看附录 5。

非保守系统的相迹图，需要应用式(4-95)，求得相迹曲线方程为

$$\frac{dq}{\dfrac{\partial H}{\partial p}}=\frac{dp}{-\dfrac{\partial H}{\partial q}+Q} \tag{4-102}$$

故$\frac{\partial H}{\partial p}=0$ 和 $-\frac{\partial H}{\partial q}+Q=0$ 是奇点。

例 4-10　求悬挂刚杆的质量可以略去不计而具有阻力 $-kl\dot{\varphi}$ 的单摆的相迹图。

解：由例 4-10 知式(4-102)的 H 和 Q 应为：

$$H=\frac{p^2}{2ml^2}-mgl\cos\varphi$$

$$Q=-kl^2\dot{\varphi}$$

故正则方程为:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{p}{ml^2},\quad \frac{dp}{dt}=-mgl\sin\varphi-kl^2\dot{\varphi}$$

令
$$y=\frac{p}{ml^2},$$

则:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{dt}=-\frac{g}{l}\sin\varphi-\frac{k}{m}y=-a\sin\varphi-by\\&\frac{d\varphi}{dt}=y\end{aligned}\right\}$$

式中 $b=\frac{k}{m}, a=\frac{g}{l}$。

现在用利纳德(Liénard)作图法来画出本题的相迹[参 14]。

因

$$\frac{dy}{d\varphi}=-\frac{a\sin\varphi+by}{y} \tag{a}$$

在(y,φ)平面上作曲线$a\sin\varphi+by=0$；如图 4-12 所示，在(y,φ)平面上任一点$M(y,\varphi)$作 $\overline{MD}$ 垂直于φ轴，交φ轴于E，交曲线于D。则$\overline{ME}=y$，$\overline{ED}=\frac{a}{b}\sin\varphi$，$\overline{MD}=y+\frac{a}{b}\sin\varphi$。在$\varphi$轴上截$\overline{EF}=b\overline{MD}=by+a\sin\varphi$，

则

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\overline{ME}}{\overline{EF}}=\frac{y}{by+a\sin\varphi}$$

在M点作$\overline{FM}$的垂线$\overline{MM'}$，则$\overline{MM'}$的斜率为

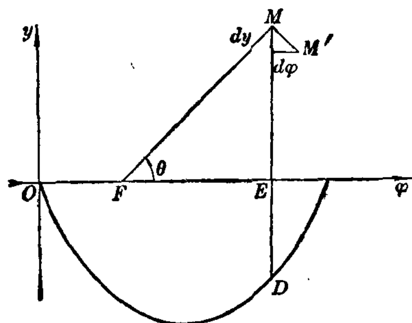


图 4-12

$$\frac{dy}{d\varphi}=-\frac{1}{\mathrm{tg}\theta}=-\frac{a\sin\varphi+by}{y}$$

在整个(φ, y)平面上作许多微段，而用曲线与微线段相切，可得相迹曲线，如图 4-13 所示。

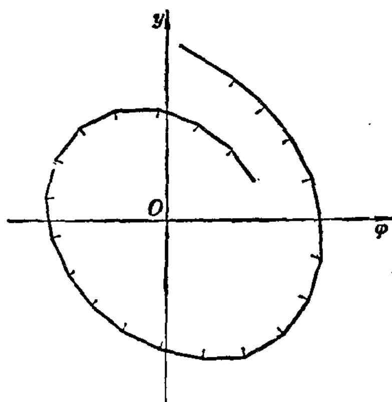


图 4-13

奇点位置：

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{ml^2}=y=0;\quad -\frac{\partial H}{\partial q}+Q=-ml^2(a\sin\varphi+by)$$

所以，$y=0$，$\sin\varphi=0$，为奇点位置决定条件。现在 $y=0$；$\varphi=0$，$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi\cdots$的奇点称为焦点(Focus)，这是稳定点。而 $y=0$；$\varphi=\pm\pi$，$\pm 3\pi\cdots$仍是鞍点，这是不稳定点。

§ 4-9 正则方程在统计力学中的应用——刘维(Liouville)定理

统计力学的研究对象，是一大群分子和其它粒子等微观客体的集团。一立方厘米气体在标准状态就有约 2.68×10^{19} 个分子，它们在一秒钟内要碰撞约 10^{29} 次，所以我们没有力量研究个别分子的运动。另一方面，热力学中的宏观量如密度、内能、压强和温度等，其本身即是微观量的统计平均，客观上需要采用统计方法。所以经典统计力学就要利用分析动力学的知识来研究大群分子和

原子的运动。

设有一大群单原子分子，每个分子有三个坐标 x_i、y_i、z_i 和三个动量 $p_{xi}=m_i\dot{x}_i$、$p_{yi}=m_i\dot{y}_i$、$p_{zi}=m_i\dot{z}_i$。所以每一个分子在六维的相空间中有一个代表点。由于分子的数目很多，又在不断地运动，因此，我们可以把它们在相空间中的代表点，看成像流体一样均匀地分布在整个六维相空间[参8]。设某代表点在相空间的位置矢为

$$\boldsymbol{r}=q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3+p_1\boldsymbol{e}_4+p_2\boldsymbol{e}_5+p_3\boldsymbol{e}_6$$

式中 $\boldsymbol{e}_i$ 是六维正交坐标系的沿坐标轴的单位矢量。那末代表点的相速度为

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dq_1}{dt}\boldsymbol{e}_1+\frac{dq_2}{dt}\boldsymbol{e}_2+\frac{dq_3}{dt}\boldsymbol{e}_3+\frac{dp_1}{dt}\boldsymbol{e}_4+\frac{dp_2}{dt}\boldsymbol{e}_5+\frac{dp_3}{dt}\boldsymbol{e}_6$$

仿照三维空间散度(Divergence)的定义

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

对六维的相空间亦有

$$\mathrm{div}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}+\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt}+\frac{\partial}{\partial p_3}\frac{dp_3}{dt} \tag{4-103}$$

由正则方程

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\qquad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}+\frac{\partial}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)+\frac{\partial}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)=0 \tag{4-104}$$

于是式(4-103)成为

$$\mathrm{div}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=0 \tag{4-105}$$

在流体力学中，div$v$=0表示流体是不可压缩的，也就是流体的密度到处不变。同理式(4-105)表示：

相空间中，系综的n率密度在运动中保持不变。这就是刘维定理。或叙述为：

相空间的体积元在按照正则方程运动时，保持不变。

在经典统计力学中，刘维定理是个基本定理。例如在求马斯斯威尔理想气体的分子速度分布定理时，就要以它为基础。这个定理尚有其它不同观点的证明。

这结论对双原子分子也成立。因为除了如图4-14的x轴，$J_x=0$外，$J_y\neq 0, J_z\neq 0$。因此，绕y轴和z轴的角度的广义坐标Q_y和Q_z以及它的广义动量p_4和p_5的存在，所以(Q_y, p_4)和(Q_z, p_5)也使式(4-104)成立，因而在$2N=10$维相空间中，这定理成立。

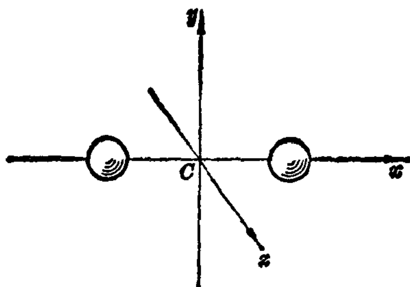


图 4-14

§4-10 用正则方程求扰动方程——运动稳定性问题

在正则方程式(4-94)中，以x_1、x_2、…、x_N表示广义坐标q_1、q_2、…、q_N，以x_{N+1}、x_{n+2}、…、x_{2N}表示广义动量p_1、p_2、…、p_N。令$2N=m$，则统一型式可写成

$$\frac{dx_r}{dt}=X_r(x_1, x_2, \cdots, x_m; t) \quad (r=1, 2, \cdots, m) \tag{4-106a}$$

如以多维矢量表示 $x=\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m; t\}$，$X=\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ 和 $X_r=X_r(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m; t)$，那末式

(4-106a)便可缩写成

$$\dot{x}=X \tag{4-106b}$$

这种型式的微分方程在数学上容易作一般性讨论，可视其为研究的标准型式，而正则方程正具备这种型式的优点。当然，将拉格朗日方程进一步变化，也可以得到这样的型式。我们从式(4-15)，得动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{N}b_j\dot{q}_j+c$$

式中 $a_{jk}=a_{kj}$，b_j，c 是 $(q_1, q_2, \cdots, q_N; t)\equiv(q, t)$ 的函数，代入式(4-10)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1, 2, \cdots, N)$$

可得

$$\sum a_{jk}\ddot{q}_k=Y_j(q, \dot{q}, t) \qquad (j=1, 2, \cdots, N) \tag{4-107}$$

自上式解出

$$\ddot{q}_k=Z_k(q, \dot{q}, t) \qquad (k=1, 2, \cdots, N) \tag{4-108}$$

令 $\dot{q}_k=x_{N+k}$，则亦可化成一阶微分方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{q}_k=x_{N+k}\\&\dot{x}_{N+k}=Z_k(q, x, t)\end{aligned}\right\} \qquad (k=1, 2, \cdots, N) \tag{4-109}$$

一般从式(4-107)解 $\ddot{q}_k(k=1, 2, \cdots, N)$ 的联立方程的计算工作量与正则方程必须把 $H(q, \dot{q}, t)$ 改写成 $H(q, p, t)$ 时，要由式(4-86)解出 p 为 q 的函数的计算工作量大致差不多。不过直接利用正则方程，就可以得到形式上的优点。现在举出三个例子，来说明这种形式的优点，在本节先说明在研究运动稳定性方面的应用。

在式(4-106a)中，$\frac{dx_1}{dt}$、$\frac{dx_2}{dt}$…、$\frac{dx_{2N}}{dt}$是代表点在相空间中的速度，它与相轨迹相切，当 X_r 包含 t 时，就表示这些切线是随着时间变化的。如果各 X_r 都不含 t，那末这些切线方向是恒定的，相迹也是固定的。我们称这种系统为自治系统 (Autonomous system)。

设我们自式(4-106a)解出一组特解

$$x_i = f_i(t) \qquad (i=1, 2, \cdots, 2N) \tag{4-110}$$

这特解满足起始条件：当 $t=t_0$时

$$x_{i(0)} = f_i(t_0) \qquad (i=1, 2, \cdots, 2N)$$

如果这个力学系统得到外界的扰动，这相当于改变了初始条件：$t=t_0$时

$$\bar{x}_{i0} = x_{i0} + z_{i0} \qquad (i=1, 2, \cdots, 2N) \tag{4-111}$$

与初始条件相应的解为

$$\bar{x}_i = \bar{f}_i(t) = x_i + z_i \tag{4-112}$$

如果对于无论如何小的正数 $\varepsilon>0$，我们总可以找到另一个正数 $\eta(\varepsilon)>0$，使得条件

$$|\bar{x}_{i0} - x_{i0}| \leqslant \eta \qquad (i=1, 2, \cdots, 2N)$$

成立后，在一切时间 $t \geqslant t_0$

$$|\bar{f}_i(t) - f_i(t)| \leqslant \varepsilon$$

都能成立，那末解式(4-110)所代表的运动称为是稳定的。

将式(4-112)代入式(4-106)得

$$\frac{d(x_i+z_i)}{dt} = X_i(x_1+z_1, x_2+z_2, \cdots, x_{2N}+z_{2N}; t)$$

$$(i=1, 2, \cdots, 2N) \tag{4-113}$$

于是得

$$\frac{dz_i}{dt} = X_i[z_1+f_1(t),\ z_2+f_2(t), \cdots, z_{2N}+f_{2N}(t); t] -$$

$$-X_i[f_1(t), f_2(t), \cdots, f_{2N}(t)]$$

以 $Z_i(z_1, z_2, \cdots, z_{2N}; t)$ 代表上式右方，则得偏差方程

$$\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, z_2, \cdots, z_{2N}; t) \qquad (i=1, 2, \cdots, 2N) \tag{4-114}$$

我们看出，偏差方程与被扰动的方程(式4-106a)同是标准形式。

假定式(4-106a)中，各 X_i 为 t、x_1、x_2、$\cdots$, x_{2N} 的实函数，在定义域

$$t \geqslant t_0, \quad |x_i| \leqslant A \qquad (A\text{ 为正常数})$$

内可展开成升幂级数(即 X_i 是解析函数)，那么式(4-114)可写成

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{\gamma=1}^{2N} a_{i\gamma} z_\gamma + \sum_j P_{ij} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_{2N}^{m_{2N}} \qquad (i=1, 2, \cdots, 2N)$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{2N} > 1$$

式中 P_{ij} 的第一足标是属于 i 式，第二足标表示随各指数而异①。如果我们略去上式右边的第二项(即非线性项)，那末我们就得到第一次近似的扰动方程

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{\gamma=1}^{2N} a_{i\gamma} z_\gamma \qquad (i=1, 2, \cdots, 2N) \tag{4-115}$$

对于自治系统，$a_{i\gamma}$ 与时间无关。设 $z_i = c_i e^{\lambda t}$ 为上式的解，代入上式，经整理后得:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1m}c_m = 0 \\ a_{21}c_1 + (a_{22}-\lambda)c_2 + \cdots + a_{2m}c_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + (a_{mm}-\lambda)c_m = 0 \end{array}\right\} \tag{4-116}$$

上式有 c_1、c_2、c_3、……、c_m 一组不完全为零解的条件是

① 参看 И. М. 巴巴科夫，《振动理论》，495 页

$$D(\lambda)\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

上式与久期方程式(3-6)形式相同，只是 a_{ij} 与 a_{ji} 不一定相等，而且 a_{ij} 可正可负，随力学问题的内容而定。式(4-116)称为特征方程，这样得到的根 λ 不一定是实数，也可能是复数根。

下面研究关于圆型限制三体问题的一个稳定性判别问题，来说明如何应用上述方法解决实际稳定性问题［参 9(a)］。所谓圆型限制三体问题是质量为 m_1、m_2 的 A、B 两个质点，绕它们的公共质心 G 作圆运动。另一个质量为 m 远比 m_1、m_2 为小的质点 P，在上述两个质点的万有引力场中运动，如图 4-15 所示。由于 m 很

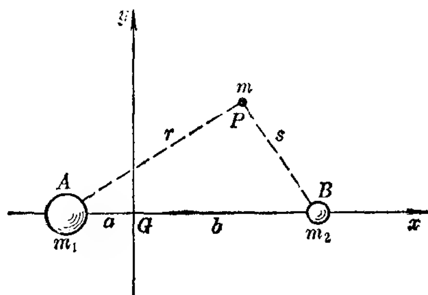


图 4-15

小，所以后者的运动不会影响前两者的圆运动。限制三体问题就是研究小质量质点 P 的运动。

A、B 两质点的角速度 ω 由开普勒(Kepler)第三定律决定，为

$$\omega^2=\frac{\gamma(m_1+m_2)}{l^3};\quad l=AB$$

公共质心 G 的位置由 $a+b=l$ 和 $a:b=m_2:m_1$ 得到：

$$a=\frac{m_2}{m_1+m_2}l,\quad b=\frac{m_1}{m_1+m_2}l$$

我们采用随 A、B 两质点转动的坐标系 (Gxy)，相当于式(4-31)的 (x', y') 坐标系。由式(4-32)，可知动能为

$$T=\frac{1}{2}m[(\dot{x}-y\omega)^2+(\dot{y}+x\omega)^2]$$

位能为

$$V=-\frac{\gamma m_1 m}{r}-\frac{\gamma m_2 m}{s}$$

式中:

$$r^2=(x+a)^2+y^2, \quad s^2=(x-b)^2+y^2$$

略去常数因子 m，则拉格朗日函数可写为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\omega(x\dot{y}-y\dot{x})+\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)+$$

$$+\frac{\gamma m_1}{r}+\frac{\gamma m_2}{s} \tag{4-117}$$

则:

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dot{x}-y\omega$$

$$p_y=\dot{y}+\omega x$$

哈密顿函数为

$$H=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)-\frac{\gamma m_1}{r}-\frac{\gamma m_2}{s}= \tag{4-118}$$

$$=\frac{1}{2}[p_x+y\omega)^2+(p_y-x\omega)^2]+\gamma U$$

由式(4-117)的这个 L 函数，已经可以应用拉格朗日方程导出所需要的运动方程，不过为了说明应用正则方程的方法，所以采用下法。

式中

$$-\gamma U=T_0-V=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\omega^2+\frac{\gamma m_1}{r}+\frac{\gamma m_2}{s}$$

即

$$-U=\frac{1}{2}\frac{m_1+m_2}{l^3}(x^2+y^2)+\frac{m_1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}+$$

$$+\frac{m_2}{\sqrt{(x-b)^2+y^2}} \tag{4-119}$$

将式(4-118)代入正则方程:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_y}$$

$$\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dp_y}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y}$$

得:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=p_x-y\omega,\ \dot{y}=p_y-\omega x\\&\frac{dp_x}{dt}=+(p_y-x\omega)\omega-\gamma\frac{\partial U}{\partial x}\\&\frac{dp_y}{dt}=-(p_x+y\omega)\omega-\gamma\frac{\partial U}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{4-120}$$

动平衡点①的位置由下面两式的根决定:

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{m_1+m_2}{l^3}x-\frac{m_1(x+a)}{r^3}-\frac{m_2(x-b)}{s^3}=0\\&-\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\frac{m_1+m_2}{l^3}-\frac{m_1}{r^3}-\frac{m_2}{s^3}\right)y=0\end{aligned}\right\} \tag{4-121}$$

令

$$\beta=\frac{m_1+m_2}{l^3}-\frac{m_1}{r^3}-\frac{m_2}{s^3} \tag{4-122}$$

则式(4-121)可写成:

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial U}{\partial x}=\beta x-\frac{m_1a}{r^3}+\frac{m_2b}{s^3}=0\\&-\frac{\partial U}{\partial y}=\beta y=0\end{aligned}\right\} \tag{4-123}$$

---

① 这是相对于转动坐标系的平衡点，工程上有动平衡(Dynamics equilibrium)这个术语。

从上面第二式，肯定有两种可能：

(1) $y=0$，这动平衡点在 x 轴上共有三点，它的位置 x 可由式(4-123)的第一式求得。这三点都是不稳定的，本书不予讨论。

(2) $\beta=0$，则由式(4-122)容易看出，$l=r=s$ 是适合的一点。所以此时有两个动平衡点，这两点与 A、B 成等边三角形，如图 4-16 上位置 C、D 两点。这两点的坐标很容易从图上算得为：

$$C\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{l}{2},\ \sqrt{3}\frac{l}{2}\right)=(x_0,\ y_0)$$

$$D\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{l}{2},\ -\sqrt{3}\frac{l}{2}\right)=(x_0,\ -y_0)$$

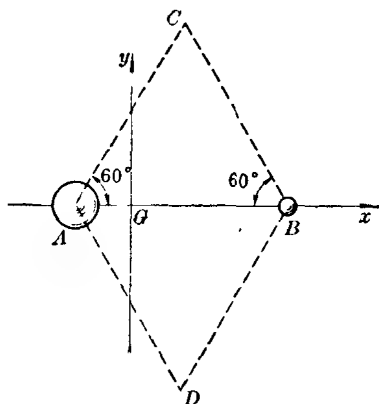


图 4-16

假定现在质点在相空间中的代表点 (x, y, p_x, p_y) 的位置发生微小变动，而有 $(x+\xi_1, y+\xi_2, p_x+\xi_3, p_y+\xi_4)$，则变动后的式(2-137)式成为：

$$\frac{d}{dt}(x+\xi_1)=p_x+\xi_3+(y+\xi_2)\omega$$

$$\frac{d}{dt}(y+\xi_2)=p_y+\xi_4-(x+\xi_1)\omega$$

$$\frac{d}{dt}(p_x+\xi_3)=(p_y+\xi_4)\omega-(x+\xi_1)\omega^2-\gamma\frac{\partial U'}{\partial(x+\xi_1)}$$

$$\frac{d}{dt}(p_y+\xi_4)=-(p_x+\xi_3)\omega-(y+\xi_2)\omega^2-\gamma\frac{\partial U}{\partial(y+\xi_2)}$$

即:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\xi_1=\omega\xi_2+\xi_3\\
&\frac{d}{dt}\xi_2=-\omega\xi_1+\xi_4\\
&\frac{d}{dt}\xi_3=-\omega^2\xi_1+\xi_4\omega-\gamma\left[\frac{\partial U'}{\partial(x+\xi_1)}-\frac{\partial U}{\partial x}\right]\\
&\frac{d}{dt}\xi_4=-\omega^2\xi_2-\omega\xi_3-\gamma\left[\frac{\partial U'}{\partial(y+\xi_2)}-\frac{\partial U}{\partial y}\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}124)$$

因 ξ_1 和 ξ_2 是微量,所以 $U'(x+\xi_1, y+\xi_2)$ 的偏导数可在 $U(x, y)$ 的偏导数附近用泰勒级数展开,并且 ξ 小得可以略去高次项。因此:

$$\frac{\partial U'}{\partial(x+\xi_1)}=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\xi_1+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\xi_2$$

$$\frac{\partial U'}{\partial(y+\xi_2)}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\xi_1+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\xi_2$$

令:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=A,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=B,\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=C$$

所以:

$$\frac{\partial U'}{\partial(x+\xi_1)}-\frac{\partial U}{\partial x}=A\xi_1+B\xi_2$$

$$\frac{\partial U'}{\partial(y+\xi_2)}-\frac{\partial U}{\partial y}=B\xi_1+C\xi_2$$

将上面两式代入式(4-124),可得特征方程

$$\begin{vmatrix}
-\lambda & \omega & 1 & 0\\
-\omega & -\lambda & 0 & 1\\
-\gamma A-\omega^2 & -\gamma B & -\lambda & \omega\\
-\gamma B & -\gamma C-\omega^2 & -\omega & -\lambda
\end{vmatrix}=0$$

展开后得

$$\lambda^4+\lambda^2[4\omega^2+\gamma(A+C)]+\gamma^2(AC-B^2)=0 \qquad (4\text{-}125)$$

从式(4-121)式，可作出U的二阶偏导数如下：

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\beta+\frac{3m_1(x+a)^2}{r^5}+\frac{3m_2(x-b)^2}{s^5}$$

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{3m_1(x+a)y}{r^5}+\frac{3m_2(x-b)y}{s^5}$$

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\beta+\frac{3m_1y^2}{r^5}+\frac{3m_2y^2}{s^5}$$

现在讨论质点在C点附近的稳定性。则因在C有$r_0=s_0=l$，所以自式(4-122)有$\beta_0=0$。于是令

$$x_0=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\frac{l}{2} \text{ 和 } y_0=\sqrt{3}\frac{l}{2}$$

则

$$A+C=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0=-\frac{3(m_1+m_2)}{l^3}$$

所以

$$4\omega^2+\gamma(A+C)=\frac{\gamma(m_1+m_2)}{l^3}$$

和

$$A\cdot C-B^2=\left(\frac{3y^2(m_1+m_2)}{l^5}\right)\left(\frac{3[(m_1+m_2)x^2-am_1l]}{l^5}\right)-$$

$$-\left[\frac{3y(m_1+m_2)x}{l^5}\right]^2=\frac{27m_1m_2}{4l^6}$$

这样，式(4-125)成为

$$\lambda^4+\frac{\gamma(m_1+m_2)}{l^3}\lambda^2+\frac{27}{4}\frac{\gamma^2m_1m_2}{l^6}=0$$

上式对λ^2有负实根的条件是

$$\left(\frac{\gamma(m_1+m_2)}{l^3}\right)^2-4\left(\frac{27}{4}\frac{\gamma^2m_1m_2}{l^6}\right)>0$$

即

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2-25\left(\frac{m_1}{m_2}\right)+1>0 \tag{4-126}$$

上式满足时，C 点的平衡在一阶近似内是稳定的。假定 $m_1>m_2$，则当$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)>24.96$ 时，条件式(4-126)满足。此时 C、D 两点都是一阶稳定的。这五个动平衡点是拉格朗日在 1772 年提出来的，盖尔登(Gylden) (1884年)曾证明在适合上述质量比的情况下，环绕 C 和 D 有无限小的周期性轨道的存在。温特纳 (Wintner) (1941年)曾证明等边三角形平衡点的一阶稳定性是由于对转动系统的偏离运动方程存在哥氏惯性力的缘故[参19]。太阳和任一行星的质量比都附合上述质量比的条件，十九世纪发现了与木星、太阳成等边三角形的小行星群。关于绕 C、D 两点无限小的周期性轨道力学家们已有大量的研究，限于本书的篇幅，不宜多加讨论。

§4-11 正则方程经接触变换保持形式不变

现在我们将动力变数$(q_1, q_2, \cdots, q_N; p_1, p_2, \cdots, p_N)$变换到新的动力变数$(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N; P_1, P_2, \cdots, P_N)$，如果$\sum_{i=1}^{N} q_i\,dp_i -$ $-\sum_{i=1}^{N} Q_i dP_i$ 正好凑合成多变量(q, p, Q, P)的函数 S 的全微分，即

$$\sum_{i=1}^{N} q_i\,dp_i-\sum_{i=1}^{N} Q_i dP_i=dS \tag{4-127}$$

那么数学家索弗斯利 (Sophus Lie) 称这样的变换为接触变换 (Contact transformation)。

例如 $F(q, P)$ 是$(q_1, q_2, \cdots, q_N; P_1, P_2, \cdots, P_N)$ $2N$ 个变数的任意可微函数，变换由下列两式决定：

$$p_i=\frac{\partial F}{\partial q_i},\ Q_i=\frac{\partial F}{\partial P_i} \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{4-128}$$

那末

$$\sum_i q_i\,dp_i-\sum_i Q_i dP_i=$$

$$=\sum_i q_i\,dp_i+\sum_i p_i\,dq_i-\sum_i P_i dQ_i-\sum_i Q_i dP_i=$$

$$=d\Big(\sum_i p_i\,q_i\Big)-\sum_i\Big(\frac{\partial F}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial F}{\partial P_i}dP_i\Big)=$$

$$=d(\sum_i p_i q_i-F)$$

所以式(4-128)所表示的变换就属于接触变换。

但是有一个例外:

$$p_i=c_iQ_i,\quad q_i=-\frac{P_i}{c_i}$$

此时

$$\Sigma q_i dp_i-\Sigma Q_i dP_i=\Sigma q_i dp_i-\Sigma\Big(\frac{p_i}{c_i}\Big)d(-c_iq_i)=$$

$$=d\Sigma q_i p_i$$

这相当于 $F=0$, 所以式(4-128)此时不能引用。适合于接触变换的变换式(4-128)由雅科毕提出。

现在证明,正则方程

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\cdots,N)\tag{4-94}$$

经接触变换式(4-127)变换后,仍保持型式不变。

由式(4-127)有

$$\Sigma q_i\frac{dp_i}{dt}-\Sigma Q_i\frac{dP_i}{dt}=\frac{dS}{dt}\tag{4-129}$$

如果我们由正则方程解出了N对变数, 即求出 q_i、p_i 为时间和 $2N$ 个任意常数的函数:

$$q_i=q_i(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{2N};\,t)$$

$$p_i = p_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2N}; t)$$

那末变换后的N对新动力变数Q_i、P_i也可以同样表示成α、t的函数。因此式(4-129)也可以写成

$$\sum_i q_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} - \sum_i Q_i \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \tag{4-130}$$

将式(4-129)对α_k取偏导数,式(4-130)对t取导数,则由于

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}$$

所以有

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\Sigma q_i \frac{dp_i}{dt} - \Sigma Q_i \frac{dP_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt}\left(\Sigma q_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} - \Sigma Q_i \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_k} \right)$$

移项后得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i q_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\Sigma q_i \frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt}\left(\Sigma Q_i \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_k} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \alpha_k}\left(\Sigma Q_i \frac{dP_i}{dt} \right) \tag{4-131}$$

因为式(4-94)的$H(q, p, t)$同样可表示为$H(\alpha, t)$,所以

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} =$$

$$= \sum_i \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} - \sum_i \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} =$$

$$= \frac{d}{dt} \Sigma q_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \Sigma q_i \frac{dp_i}{dt} \tag{4-132}$$

将上式代入式(4-131),得

$$\frac{d}{dt} \Sigma Q_i \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \Sigma Q_i \frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k}$$

利用变换将函数$H(q, p, t)$变为$K(Q, P, t)$,则上式可改写为

$$\Sigma \frac{dQ_i}{dt} \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_k} - \Sigma \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_k} \frac{dP_i}{dt} = \Sigma \frac{\partial K}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_k} + \Sigma \frac{\partial K}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_k}$$

或

$$\Sigma\left(\frac{dQ_i}{dt}-\frac{\partial K}{\partial P_i}\right)\frac{\partial P_i}{\partial \alpha_k}-\Sigma\left(\frac{dP_i}{dt}+\frac{\partial K}{\partial Q_i}\right)\frac{\partial Q_i}{\partial \alpha_k}=0 \quad (k=1, 2, \cdots, N)$$

因各 P、Q 都是相互独立的，故

$$\frac{\partial(Q_1, \cdots, Q_N; P_1, \cdots, P_N)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{2N})}\neq 0$$

得上式唯一解案为:

$$\frac{dQ_i}{dt}-\frac{\partial K}{\partial P_i}=0, \qquad \frac{dP_i}{dt}+\frac{\partial K}{\partial Q_i}=0 \quad (i=1, 2, \cdots, N)$$

所以用 P_i、Q_i 的新动力学方程，仍然保持正则方程的形式，哈密顿正则方程有此重要特性，这是它的优点。我们可以利用动力学方程的已知运动积分，来降低动力学微分方程的阶数，而仍保持微分方程为正则型式。现在讨论一般三体问题的降阶问题来作为例题[参 9(b)]。

所谓三体问题是指质量为 m_1、m_2、m_3 的三个质点，在万有引力作用下的运动问题。如以任何作为静止的惯性直角坐标系的坐标 (q_1, q_2, q_3)、(q_4, q_5, q_6)、(q_7, q_8, q_9) 表示三个质点的广义坐标，它们之间的距离表示为 r_{12}, r_{23}、r_{31}，那么质点系的位能可写为

$$V=-\frac{\gamma m_2 m_3}{r_{23}}-\frac{\gamma m_1 m_3}{r_{31}}-\frac{\gamma m_1 m_2}{r_{12}}=$$

$$=-\gamma m_2 m_3\{(q_4-q_7)^2+(q_5-q_8)^2+(q_6-q_9)^2\}^{-\frac{1}{2}}-$$

$$-\gamma m_3 m_1\{(q_7-q_1)^2+(q_8-q_2)^2+(q_9-q_3)^2\}^{-\frac{1}{2}}-$$

$$-\gamma m_1 m_2\{(q_1-q_4)^2+(q_2-q_5)^2+(q_3-q_6)^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

动能可写为

$$T=\frac{1}{2}m_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2+\dot{q}_6^2)+$$

$$+\frac{1}{2}m_3(\dot{q}_7^2+\dot{q}_8^2+\dot{q}_9^2)=$$

$$= \frac{1}{2m_1}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\frac{1}{2m_2}(p_4^2+p_5^2+p_6^2)+$$

$$+\frac{1}{2m_3}(p_7^2+p_8^2+p_9^2)$$

以 $H=T+V$，则三体问题的正则方程为

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad (i=1,2,\cdots,9)$$

由于假定三个质点是个孤立系统，没有受到外力影响，所以下面是十个大家熟知的运动积分：

$$\left.\begin{aligned}p_1+p_4+p_7&=a_1\\ p_2+p_5+p_8&=a_3\\ p_3+p_6+p_9&=a_5\end{aligned}\right\}\text{动量积分}$$

$$\left.\begin{aligned}m_1q_1+m_2q_4+m_3q_7-(p_1+p_4+p_7)t&=a_2\\ m_1q_2+m_2q_5+m_3q_8-(p_2+p_5+p_8)t&=a_4\\ m_1q_3+m_2q_6+m_3q_9-(p_3+p_6+p_9)t&=a_6\end{aligned}\right\}\text{质心运动定理}$$

$$\left.\begin{aligned}q_1p_2-q_2p_1+q_4p_5-q_5p_4+q_7p_8-q_8p_7&=a_7\\ q_2p_3-q_3p_2+q_5p_6-q_6p_5+q_8p_9-q_9p_8&=a_8\\ q_3p_1-q_1p_3+q_6p_4-q_4p_6+q_9p_7-q_7p_9&=a_9\end{aligned}\right\}\text{动量矩积分}$$

$$H(p,q)=h\qquad\qquad \text{动能积分}$$

应用以上十个积分，可以把原为 18 阶的微分方程组降低到 8 阶，再用“消去节点法”和“时间降阶法”降低到 6 阶。

现在用雅科毕于 1843 年发表的降阶法作为例题，说明应用质心运动积分和动量积分，作出接触变换来降阶，可以把一般三体问题化为非万有引力的两体问题[这是伯特兰(Bertrand)于 1852 年明确说明的]。

现在取 $F(q,P)$ 如下式定义：

$$F=P_1(q_4-q_1)+P_2(q_5-q_2)+P_3(q_6-q_3)+$$

$$+P_4\left(q_7-\frac{m_1q_1+m_2q_4}{m_1+m_2}\right)+P_5\left(q_8-\frac{m_1q_2+m_2q_5}{m_1+m_2}\right)+$$

$$+P_6\left(q_9-\frac{m_1q_3+m_2q_6}{m_1+m_2}\right)+P_7(m_1q_1+m_2q_4+m_3q_7)+$$

$$+P_8(m_1q_2+m_2q_5+m_3q_8)+P_9(m_1q_3+m_2q_6+m_3q_9)$$

将上式代入式(4-128)的第二式，可得：

$$Q_1=q_4-q_1,\quad Q_2=q_5-q_2,\quad Q_3=q_6-q_3,$$

$$Q_4=q_7-\frac{m_1q_1+m_2q_4}{m_1+m_2},\qquad Q_5=q_8-\frac{m_1q_2+m_2q_5}{m_1+m_2},$$

$$Q_6=q\ -\frac{m_1q_3+m_2q_6}{m_1+m_2},\qquad Q_7=m_1q_1+m_2q_4+m_3q_7,$$

$$Q_8=m_1q_2+m_2q_5+m_3q_8,\quad Q_9=m_1q_3+m_2q_6+m_3q_9$$

把 Q_7、Q_8、Q_9 除以$(m_1+m_2+m_3)$，则成为三质点的质心坐标。将质心坐标作为新坐标系的原点，则 $Q_7=Q_8=Q_9=0$。

将F代入式(4-128)的第一式，可得：

$$p_1=-P_1-P_4\frac{m_1}{m_1+m_2}+P_7m_1$$

$$p_2=-P_2-P_5\frac{m_1}{m_1+m_2}+m_1P_8$$

$$p_3=-P_3-P_6\frac{m_1}{m_1+m_2}+m_1P_9$$

$$p_4=P_1-P_4\frac{m_2}{m_1+m_2}+m_2P_7$$

$$p_5=P_2-P_5\frac{m_2}{m_1+m_2}+m_2P_8$$

$$p_6=P_3-P_6\frac{m_2}{m_1+m_2}+m_2P_9$$

$$p_7=P_4+m_3P_7$$

$$p_8=P_5+m_3P_8$$

$$p_9=P_6+m_3P_9$$

由上式，显然有：

$$p_1+p_4+p_7=P_7(m_1+m_2+m_3)$$

$$p_2+p_5+p_8=P_8(m_1+m_2+m_3)$$

$$p_3+p_6+p_9=P_9(m_1+m_2+m_3)$$

所以，P_7、P_8、P_9 是质心速度沿 x、y、z 的分量。假定质心对新坐标不动，则有 $P_7=P_8=P_9=0$，于是 $H(q,p)$ 可化成新 $K(Q、P)$ 如下：

$$\begin{aligned}K=&\frac{1}{2\mu}(P_1^2+P_2^2+P_3^2)+\frac{1}{2\mu'}(P_4^2+P_5^2+P_6^2)-\\&-\gamma m_1m_2(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)^{-\frac{1}{2}}-\gamma m_1m_3\Big[Q_4^2+Q_5^2+Q_6^2+\\&+\frac{2m_2}{m_1+m_2}(Q_1Q_4+Q_2Q_5+Q_3Q_6)+\\&+\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)\Big]^{-\frac{1}{2}}-\\&-\gamma m_2m_3\Big[Q_4^2+Q_5^2+Q_6^2-\frac{2m_1}{m_1+m_2}(Q_1Q_4+Q_2Q_5+\\&+Q_3Q_6)+\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)\Big]^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{4-133}$$

式中：

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\qquad \mu'=\frac{m_3(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3}$$

变换后的正则方程为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dQ_r}{dt}&=\frac{\partial K}{\partial P_r}\\\frac{dP_r}{dt}&=-\frac{\partial K}{\partial Q_r}\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,6)\tag{4-134}$$

上式已降低至12阶，从式(4-133)看出，新的动力学问题可以看成是质量为 μ 和 μ' 的两体问题。不过它们之间的作用力的势函数是式(4-133)的 K 中用广义坐标 Q 表示的部分，显然它已不是万有引力的势函数了。式(4-134)尚可继续降阶。

第五章　非完整系统的动力学方程

如果一个力学系统，它包含运动约束，即包含有速度的约束方程，当它们不能先行积分时，则这力学系统称为非完整系统。对于这种系统，上述拉格朗日第二类方程和哈密顿正则方程都是不适用的。现在本章来讨论如何建立适用于非完整系统的动力学方程。由于完整系统是非完整系统的特例，所以本章建立的方程也适用于完整系统。

§5-1　第一类拉格朗日方程

设某一有 n 个质点的质点系，它有 K 个含时几何约束

$$f_k(x_1, x_2, \cdots, x_{3n}; t)=0 \qquad (k=1, 2, \cdots, K) \tag{5-1}$$

和 r 个运动约束

$$a_{\rho,1}\dot{x}_1+a_{\rho,2}\dot{x}_2+\cdots a_{\rho,3n}\dot{x}_{3n}+a_\rho=0 \qquad (\rho=1, 2, \cdots, r) \tag{5-2}$$

将各 x_i 坐标给予变分，则由上两式得变分条件

$$\sum_{\nu=1}^{3n}\frac{\partial f_k}{\partial x_\nu}\delta x_\nu=0 \qquad (k=1, 2, \cdots, K) \tag{5-3}$$

和

$$\sum_{\nu=1}^{3n}a_{\rho\nu}\delta x_\nu=0 \qquad (\rho=1, 2, \cdots, r) \tag{5-4}$$

将上两式用拉格朗日不定乘子法和动力学普遍方程

$$\sum_{\nu=1}^{3n}\left(X_\nu-m_\nu\frac{d^2x_\nu}{dt^2}\right)\delta x_\nu=0 \tag{3-3}$$

相结合，就成为拉格朗日第一类方程

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(X_\gamma-m_\gamma\frac{d^2x_\gamma}{dt^2}+\sum_{k=1}^{k}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_\gamma}+\sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho a_{\rho\gamma}\right)\delta x_\gamma=0 \tag{5-5}$$

上式是将式(5-3)乘以 λ_k，式(5-4)乘以 μ_ρ，然后各式与式(3-3)相加而得。仿照不定乘子法常用的演绎逻辑，得 $3n$ 个方程

$$X_\gamma-m_\gamma\frac{d^2x_\gamma}{dt^2}+\sum_{k=1}^{k}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_\gamma}+\sum_{\rho=1}^{r}\mu_\rho a_{\rho\gamma}=0$$

$$(\gamma=1, 2, \cdots, 3n) \tag{5-6}$$

将式(5-6)、(5-1)、(5-2)三种类型的方程结合起来，共得$(3n+k+r)$个方程，可解出$3n$个x_1、x_2、…、x_{3n}，k 个 λ_1、λ_2、…、λ_k，r 个 μ_1、μ_2、…、μ_r 正好共 $3n+k+r$ 个变数为时间 t 的函数。

现在说明 λ 和 μ 可以用来决定与它有关的约束反作用力。想象这质点系只受到一个含时几何约束式(5-1)作用，其余约束不存在，那么在式(5-6)中只剩下一个约束式如下：

$$X_\gamma-m_\gamma\frac{d^2x_\gamma}{dt^2}+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_\gamma}=0 \qquad (\gamma=1, 2, \cdots, 3n)$$

另一方面，如果由式(5-1)这个约束所引起的约束反作用力为 N_γ，则由牛顿第二定律有

$$X_\gamma-m_\gamma\frac{d^2x_\gamma}{dt^2}+N_\gamma=0 \qquad (\gamma=1, 2, \cdots, 3n)$$

比较上面两式，得

$$N_\gamma=\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_\gamma}$$

应用同样方法的论点，可以导出运动约束式(5-2)所引起的约束反作用力

$$N'_\gamma=\mu_\rho a_{\rho\gamma}$$

例 5-1 两个质量均为 $m=1$ 的质点 M_1、M_2，以质量可略去不计的刚性

杆连接而在铅垂面内运动。杆的初始位置为水平，质心 C 的初始位置在原点上。质心的初速度为 v_0，杆的初角速度为 ω_0。现在两质点运动时，有一种约束使它们的质心速度始终沿着杆的方向。求这两个质点的运动和所加予的约束力[参 10(a)]

解： 设两质点的坐标为 x_1, y_1；x_2, y_2。则约束方程为

$$f=\frac{1}{2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2]=0 \tag{a}$$

和

$$(\dot{y}_1+\dot{y}_2)(x_2-x_1)-(\dot{x}_1+\dot{x}_2)(y_2-y_1)=0 \tag{b}$$

将上式改写为

$$a_1\dot{x}_1+a_2\dot{x}_2+a_3\dot{y}_1+a_4\dot{y}_2=0$$

式中：

$$a_1=a_2=y_1-y_2,\quad a_3=a_4=x_2-x_1$$

现在主动力只有两个重力 m_1g、m_2g。因为是平面内的运动问题，所以本题的式 (5-6) 只有 λ、μ 两个乘子和 $2n=4$ 四个方程如下：

$$-m_1\ddot{x}_1+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}+\mu a_1=0$$

$$-m_2\ddot{x}_2+\lambda\frac{\partial f}{\partial x_2}+\mu a_2=0$$

$$-m_1g-m_1\ddot{y}_1+\lambda\frac{\partial f}{\partial y_1}+\mu a_3=0$$

$$-m_2g-m_2\ddot{y}_2+\lambda\frac{\partial f}{\partial y_2}+\mu a_4=0$$

将 f 和各个 a 代入上式，并注意 $m_1=m_2=1$，则上式成为：

$$-\ddot{x}_1-\lambda(x_2-x_1)+\mu(y_1-y_2)=0 \tag{c}$$

$$-\ddot{x}_2+\lambda(x_2-x_1)+\mu(y_1-y_2)=0 \tag{d}$$

$$-g-\ddot{y}_1-\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1)=0 \tag{e}$$

$$-g-\ddot{y}_2+\lambda(y_2-y_1)+\mu(x_2-x_1)=0 \tag{f}$$

再由式(c)+(d)和式(e)+(f)得：

$$\left.\begin{aligned}-(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)+2\mu(y_1-y_2)=0\\ -2g-(\ddot{y}_1+\ddot{y}_2)+2\mu(x_2-x_1)=0\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

将上面两式消去 μ，得：

$$(x_2-x_1)(\ddot{x}_2+\ddot{x}_1)-(\ddot{y}_1+\ddot{y}_2)(y_1-y_2)-2g(y_1-y_2)=0 \tag{g}$$

又由式$(d)-(c)$和式$(f)-(e)$得:

$$-(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)+2\lambda(x_2-x_1)=0$$
$$-(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)+2\lambda(y_2-y_1)=0$$

将上列两式消去 λ，得

$$(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)(y_2-y_1)-(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)(x_2-x_1)=0 \tag{h}$$

令:

$$u=x_2-x_1,\quad v=y_2-y_1,\quad P=\dot{x}_1+\dot{x}_2,\quad Q=\dot{y}_1+\dot{y}_2$$

则(a)、(h)、(b)、(g)四式可分别写为:

$$\left.\begin{aligned}&u^2+v^2=l^2 &(i)\\&\ddot{u}v-u\ddot{v}=0 &(j)\\&Pv-Qu=0 &(k)\\&\dot{P}u-\dot{Q}v+2gv=0 &(l)\end{aligned}\right\}$$

上面的式(i)，可看成为在(u,v)平面中的一点作圆周运动；式(j)表示这点的加速度沿半径方向，所以一定是等速圆运动。于是可写为：

$$u=l\cos(\omega t+\varphi_0),\quad v=l\sin(\omega t+\varphi_0) \tag{m}$$

由上式知道，$\varphi=\omega t+\varphi_0$ 就是刚杆 M_1M_2 与水平轴 x 的夹角。因为 $t=0$，$\varphi=0$，所以 $\varphi_0=0$。又因 $\omega=\omega_0$ 为常量，因此以后 ω_0 可略去足标。由于两质点作等角速度旋转，所以可以确定它们无约束力矩。

式(k)可写为

$$P:Q=u:v=\cos\omega t:\sin\omega t$$

或:

$$P=\psi\cos\omega t,\quad Q=\psi\sin\omega t \tag{n}$$

将上式代入式(l)，得

$$\frac{d\psi}{dt}=-2g\sin\omega t$$

积分上式，得

$$\psi=\frac{2g}{\omega}\cos\omega t+C$$

将上式代入式(n)，得:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1+\dot{x}_2&=\left(\frac{2g}{\omega}\cos\omega t+C\right)\cos\omega t\\\dot{y}_1+\dot{y}_2&=\left(\frac{2g}{\omega}\cos\omega t+C\right)\sin\omega t\end{aligned}\right\} \tag{o}$$

应用初始条件，$t=0$，$v_0=\frac{1}{2}\left(\frac{2g}{\omega}+C\right)$得

$$C=2\left(v_0-\frac{g}{\omega}\right)$$

再将式(o)积分，得：

$$x_1+x_2=\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t\cos\omega t+\frac{gt}{\omega}+\frac{C}{\omega}\sin\omega t+D$$

$$y_1+y_2=\frac{g}{\omega^2}\sin^2\omega t-\frac{C}{\omega}\cos\omega t+E$$

$t=0$，由上式得：

$$D=0,\quad E-\frac{C}{\omega}=0$$

所以：

$$\left.\begin{aligned}x_1+x_2&=\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t\cos\omega t+\frac{gt}{\omega}+\frac{C}{\omega}\sin\omega t\\ y_1-y_2&=\frac{g}{\omega^2}\sin^2\omega t+\frac{C}{\omega}(1-\cos\omega t)\end{aligned}\right\}\qquad(p)$$

又式(m)可写为：

$$x_2-x_1=l\cos\omega t,\quad y_2-y_1=l\sin\omega t$$

从以上四式，可解出 x_1、x_2、y_1、y_2 如下：

$$x_1=\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\cos\omega t+\frac{gt}{2\omega}+\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{g}{\omega}\right)\sin\omega t-\frac{l}{2}\cos\omega t$$

$$x_2=\frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t\cos\omega t+\frac{gt}{2\omega}+\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{g}{\omega}\right)\sin\omega t+\frac{l}{2}\cos\omega t$$

$$y_1=\frac{g}{2\omega^2}\sin^2\omega t+\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{g}{\omega}\right)(1-\cos\omega t)-\frac{l}{2}\sin\omega t$$

$$y_2=\frac{g}{2\omega^2}\sin^2\omega t+\frac{1}{\omega}\left(v_0-\frac{g}{\omega}\right)(1-\cos\omega t)+\frac{l}{2}\sin\omega t$$

以上四式是两个质点的运动方程。如果要描绘出质点的运动轨迹，只要作质心 C 的轨迹，即式(p)除以2，杆的方向沿此轨迹切线方向。

现在再求约束反力如下：

$$N_{1x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}=-\lambda(x_2-x_1)=-\frac{1}{2}(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)=\frac{\omega^2 l}{2}\cos\omega t$$

$$N_{1y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y_1}=-\lambda(y_2-y_1)=-\frac{1}{2}(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)=\frac{\omega^2 l}{2}\sin\omega t$$

所以：

$$N_1=\sqrt{N_{1x}^2+N_{1y}^2}=\frac{\omega^2 l}{2}$$

这是两质点对质心作圆运动的向心力，由刚性杆供给。

由式(q)的第一式，得

$$\mu=\frac{\ddot{x}_1+\ddot{x}_2}{2(y_1-y_2)}=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{2g}{\omega}\cos^2\omega t+2\left(v_0-\frac{g}{\omega}\right)\cos\omega t\right]}{-2l\sin\omega t}=$$

$$=\frac{g}{l}(2\cos\omega t-1)+\frac{\omega v_0}{l}$$

作用于质点 M_1 的约束力 N_1'[由式(c)至(f)看出，它与作用于质点 M_2 的约束力相等)为

$$N_1'=\sqrt{(\mu a_1)^2+(\mu a_3)^2}=\mu\sqrt{(y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2}=\mu l=$$

$$=g(2\cos\omega t-1)+\omega v_0=N_2'$$

$N_1'=N_2'$ 是必然的，否则两质点不作等角速转动。另一方面，这是保证 v_0 方向始终沿着杆的必要约束力。

§5-2 非完整系统的拉格朗日推广式

采用了不定乘子法的第一类拉格朗日方程能适用于非完整系统的力学问题。但是它的缺点是局限于直角坐标系。第二类拉格朗日方程是用广义坐标表示的，对于完整系统的动力学方程很容易求出，但是它的缺点是不能求非完整系统的动力学方程。如果将两者结合起来，不就是把广义坐标式的第二类拉格朗日方程推广到非完整系统了吗？这工作首先于 1873 年由费勒斯(Ferrers)所完成。随后纽曼(C. Neumann)于 1888 年和维尔坎德(Vierkandt)于 1892 年都对这个问题作了研究。

设有一个有 n 个质点的非完整力学系统，它有 k 个含时几何约束[式(5 1)]和 r 个运动约束[式(5-2)]。在式(5-2) 中，$a_{\rho i}$ 和 a_ρ 可以是 t 和 x_1、x_2、…、x_{3n} 的函数。由于有 k 个约束方程存在，所以 $3n$ 个坐标 x_1、x_2、…、x_{3n} 只有 $m=3n-k$ 个变数是独立的。因此存在着 m 个广义坐标 q_1、q_2、…、q_m。将 n 个质点的位置 x_i 用这

些广义坐标表示出来，即

$$x_\gamma = x_\gamma(t; q_1, q_2, \cdots, q_m) \quad (\gamma = 1, 2, \cdots, 3n) \tag{5-7}$$

将上式对时间 t 求导数，得

$$\dot{x}_\gamma = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_\gamma}{\partial t} \quad (\gamma = 1, 2, \cdots, 3n) \tag{5-8}$$

于是对应的虚位移式为

$$\delta x_\gamma = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\delta q_i \quad (\gamma = 1, 2, \cdots, 3n) \tag{5-9}$$

将上式代入动力学普遍方程式(3-3)得

$$\sum_{\gamma=1}^{3n} (m_\gamma \ddot{x}_\gamma - X_\gamma) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\delta q_i = 0$$

上式可用§4-1推导第二类拉格朗日方程的方法化成

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right)\delta q_i = 0 \tag{5-10}$$

但上式各 δq_i 不是相互独立的，它们尚有由运动约束式(5-2)产生的微分约束联系着，现在来求这些微分约束。

将式(5-7)的 x_γ 代入式(5-2)的 $a_{\rho\gamma}$ 和 a_ρ 中，把式(5-8)的 $\dot{x}_\gamma$ 代入式(5-2)，这样可以得到用 q_1、q_2、…、q_n 表示成如下形式的运动约束方程：

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i + A_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, r) \tag{5-11}$$

对于虚位移 δq_i，就有下面的变分约束：

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\delta q_i = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, r) \tag{5-12}$$

所以，对于非完整约束，q_1、q_2、…、q_m 可以取任何值，但是它们表示的速度 $\dot{q}_1$、$\dot{q}_2$、…、$\dot{q}_m$ 或虚位移 δq_1、δq_2、…、δq_n 则不能任意取。因为它们之间尚有 r 个关系式(5-11)或(5-12)联系着。现在可以用拉格朗日不定乘子法，求出所需要的运动方程如下。

将不定乘子 μ_β 与式(5-12)相乘，然后对各 β 求总和，再与式(5-10)相加，按不定乘子法的一贯逻辑，可得下列 m 个方程：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i+\sum_{\beta=1}^{r}\mu_\beta A_{\beta i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m) \quad (5\text{-}13)$$

将上式与非完整约束式(5-11)结合，可解出 m 个 q_1、q_2、…、q_m 和 r 个 μ_1、μ_2、…、μ_r 为时间函数。

例 5-2 如图 5-1 所示，一薄圆板(或圆环)在粗糙水平面上作无滑动的滚动，试讨论它的运动[参 6(*b*)]。

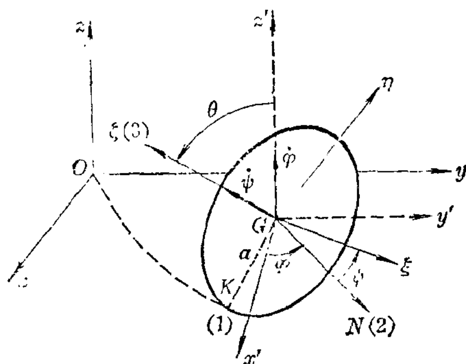


图 5-1

解： 设圆板的质量为 m，半径为 a，它的主惯性矩为 A、A、C。我们采用 $Oxyz$ 为固定于空间的直交坐标系，Oz 轴铅垂，Oxy 在圆板滚动的水平面上，$G\xi\eta\zeta$ 为动坐标，固定于圆板上，原点 G 即是圆心，$O\zeta$ 垂直于圆盘。圆盘与水平面在 t_1 时的接触点为 K，则 G 的坐标为 (x, y, z)。

$$z=a\sin\theta,\quad \dot{z}=(a\cos\theta)\dot{\theta}$$

所以圆盘的平动动能为

$$T_t=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+a^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2)$$

圆盘转动的动能按附录 VI 为

$$T_r=\frac{1}{2}(C\omega_\zeta^2+A\omega_\xi^2+A\omega_\eta^2)=$$

$$=\frac{1}{2}[C(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2+A\dot{\theta}^2+A(\dot{\varphi}\sin\theta)^2]$$

圆盘的势能为

$$V=mgz=mga\sin\theta$$

故

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+a^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}C(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta)^2+$$

$$+\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-mga\sin\theta \qquad (a)$$

现在再求约束方程。为此在 G 点作一水平面，这平面与圆盘的交线即节线 GN，与 GK 垂直。如今作直角坐标系 $G1\ 2\ 3$，使轴 1 沿 GK 方向，其单位矢量以 i 表示；轴 2 沿 GN 方向，其单位矢量以 j 表示；轴 3 即为 ζ 轴。则有：

$$(x,2)=\varphi,\quad (2,\xi)=\psi$$

$$\omega_1=-\dot{\varphi}\sin\theta,\quad \omega_2=\dot{\theta},\quad \omega_3=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$v_G=\omega\times a=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} & \dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta \\ -a & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=[0,-a(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta),a\dot{\theta}]=$$

$$=(v_1,v_2,v_3)$$

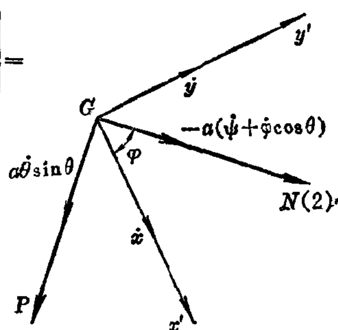


图 5-2

将 v_G 投影到通过 G 的水平面内，GK 的投影为 GP，Gy'、Gx' 各平行于 y、x 轴，则：

$$\left.\begin{aligned} v_{GP}&=v_1\cos\theta+v_3\sin\theta=a\dot{\theta}\sin\theta \\ v_N&=v_2=-a(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta) \end{aligned}\right\}$$

又从图 5-2 可以看出：

$$\left.\begin{aligned} v_{GP}&=v_x\sin\varphi-v_y\cos\varphi \\ v_N&=v_x\cos\varphi+v_y\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

这样，从上面两式，可得：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi-a\dot{\theta}\sin\theta=0\\&\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi+a\dot{\psi}+a\dot{\varphi}\cos\theta=0\end{aligned}\right\}\qquad(b)$$

应用上式可以求得虚位移方程为:

$$\left.\begin{aligned}&\delta x\sin\varphi-\delta y\cos\varphi-a\delta\theta\sin\theta=0\\&\delta x\cos\varphi+\delta y\sin\varphi+a\delta\psi+a\delta\varphi\cos\theta=0\end{aligned}\right\}\qquad(c)$$

应用式(a)中的L和上面两个约束方程，分别用乘子λ和μ代入式(5-3)，可以得到关于δx、δy、$\delta\theta$、$\delta\varphi$和$\delta\psi$的五个动力学方程如下（式中$\omega_3=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$）:

$$\left.\begin{aligned}&x:\quad m\ddot{x}=\lambda\sin\varphi+\mu\cos\varphi\\&y:\quad m\ddot{y}=-\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(d)$$

$$\left.\begin{aligned}&\theta:\quad \frac{d}{dt}(ma^2\cos^2\theta\dot{\theta}+A\dot{\theta})=-ma^2\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2-C\omega_3\dot{\varphi}\sin\theta+\\&\qquad\qquad+A\cos\theta\sin\theta\dot{\varphi}^2-mga\cos\theta-\lambda a\sin\theta\\&\varphi:\quad \frac{d}{dt}(A\sin^2\theta\dot{\varphi}-C\cos\theta\omega_3)=\mu a\cos\theta\\&\psi:\quad \frac{d}{dt}(C\omega_3)=\mu a\end{aligned}\right\}\qquad(e)$$

以上五个方程与式(b)结合，共七个方程，可以决定七个未知数x、y、θ、φ、ψ、λ和μ。

自式(d)解λ、μ得:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=m(\ddot{x}\sin\varphi-\ddot{y}\cos\varphi)\\&\mu=m(\ddot{x}\cos\varphi+\ddot{y}\sin\varphi)\end{aligned}\right\}\qquad(f)$$

上式表示λ、μ是粗糙水平面给圆盘在接触点K的约束力(即摩擦力)。

λ、μ也可以用θ、φ、ψ和它们的导数来表示。为此将式(b)对t取导数，得:

$$\ddot{x}\sin\varphi-\ddot{y}\cos\varphi+(\dot{x}\cos\varphi+\dot{y}\sin\varphi)\dot{\varphi}=a(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta)$$

$$\ddot{x}\cos\varphi+\ddot{y}\sin\varphi-(\dot{x}\sin\varphi-\dot{y}\cos\varphi)\dot{\varphi}=-a\dot{\omega}_3$$

将上式代入式(f)，并利用式(b)，得:

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=ma(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta+\omega_3\dot{\varphi})\\&\mu=ma(\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}-\dot{\omega}_3)\end{aligned}\right\}\qquad(g)$$

将上式的λ代入式(e)的第一式，并加以简化，得

$$(A+ma^2)\ddot{\theta}=A\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta-(C+ma^2)\omega_3\dot{\varphi}\sin\theta-mga\cos\theta\qquad(h)$$

将式(e)的最后两式消去μ，得

$$\frac{d}{dt}(A\dot{\varphi}\sin^2\theta)=C\omega_3\dot{\theta}\sin\theta \tag{i}$$

又将式(g)的 μ 代入式(e)的最后一式得

$$(C+ma^2)\dot{\omega}_3=ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta \tag{j}$$

(h)、(i)、(j)三式只有 θ、φ、ω_3 三个变数。

现在来求 ω_3 作为 θ 的函数的微分方程。令 $\cos\theta=\alpha$，并令 $C=2A=2kma^2$，则式(j)可以改写成

$$(2k+1)\frac{d\omega_3}{d\alpha}=-\dot{\varphi} \tag{k}$$

式(i)可改写为

$$\frac{d}{d\alpha}[(1-\alpha^2)\dot{\varphi}]=-2\omega_3 \tag{l}$$

将上两式消去 $\dot{\varphi}$，即得

$$\frac{d}{d\alpha}\left[(1-\alpha^2)\frac{d\omega_3}{d\alpha}\right]-\frac{2}{2k+1}\omega_3=0$$

或写成

$$(1-\alpha^2)\frac{d^2\omega_3}{d\alpha^2}-2\alpha\frac{d\omega_3}{d\alpha}-\frac{2}{2k+1}\omega_3=0$$

上式就是著名的勒让特微分方程，它的解法可参看[参15]。

上式系数$\frac{2}{2k+1}$，对于圆环为1；对于圆盘为$\frac{4}{3}$。如果将(k)、(l)两式消去 ω_3，并令$(1-\alpha^2)\dot{\varphi}=\beta$，那么将式($k$)和($l$)对 α 取导数，再行消去$\frac{d\omega_3}{d\alpha}$，可得

$$(1-\alpha^2)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=\frac{2}{2k+1}\beta$$

由上式可解出 β 为 α 的函数，因而可得到 $\dot{\varphi}$ 为 α 的函数。

下面求一个特殊情况的运动，即如果圆盘与水平面的倾斜角 θ 是常量 θ_0 的情况。此时 $\dot{\theta}=0$，所以由式(i)得：

$$A\dot{\varphi}\sin^2\theta=\text{常量}，\ 即\ \dot{\varphi}=\omega(\text{常量})$$

由式(j)可知：

$$\dot{\omega}_3=0，\ 所以\ \dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta=\text{常量}，\ 因此\dot{\psi}=\text{常量}。$$

于是式(b)成为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}\sin\varphi-\frac{dy}{dt}\cos\varphi=0\\&\frac{dx}{dt}\cos\varphi+\frac{dy}{dt}\sin\varphi=-a(\dot{\psi}+\omega\cos\theta_0)\end{aligned}\right\}\tag{m}$$

将上列两式消去$\frac{dy}{dt}$，得

$$\frac{dx}{dt}=-a(\dot{\psi}+\omega\cos\theta_0)\cos\varphi\tag{n}$$

积分上式得

$$x=-a\frac{(\dot{\psi}+\omega\cos\theta_0)}{\omega}\sin\omega t\tag{o}$$

把上式代入式(m)的第一式，得

$$\frac{dy}{dt}=-a(\dot{\psi}+\omega\cos\theta_0)\sin\varphi$$

积分后得

$$y=a\left(\frac{\dot{\psi}+\omega\cos\theta_0}{\omega}\right)\cos\omega t\tag{p}$$

于是有

$$r^2=x^2+y^2=a^2\left(\frac{\omega_3}{\omega}\right)^2$$

所以圆盘中心是作半径为 $r=a\left(\frac{|\omega_3|}{\omega}\right)$的圆周运动，此时式($h$)成为

$$(kma^2)\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0-ma^2(2k-1)\left(-r\frac{\omega}{a}\right)\omega\sin\theta_0-mga\cos\theta_0=0$$

即

$$[(2k+1)r+ka\cos\theta_0]\omega^2=g\cot\theta_0$$

于是圆盘公转角速度为

$$\dot{\varphi}=\omega=\sqrt{\frac{g\operatorname{ctg}\theta_0}{(2k+1)r+ka\cos\theta_0}}$$

又由关系式 $r=-a\frac{\omega_3}{\omega}$，可得自转角速度为

$$\dot{\psi}=-\left(\frac{r}{a}+\cos\theta_0\right)\omega$$

例如，对于圆盘 $k=\frac{1}{4}$，若 $a=1\text{ cm}$，$r=2a$，$\theta_0=60°$， 则 $\omega=13.45\ 1/\text{s}$，$\dot{\psi}=-33.625\,1/\text{s}$，如图 5-3所示。$\varphi=(\widehat{x'N})$ 随N而定。当G行一$2(2a)\pi$的圆周

时，N轴方向改变 2π。设G行一周的时间为 t，则 $\omega=\dot{\varphi}=\frac{2\pi}{t}$。此时接触点$K$亦在半径为 $2.5a$ 的圆周上移动一周，所以圆盘在 t 时内滚动$\frac{2(2.5a)\pi}{2a\pi}=$ $=2.5$ 圈，即 $\dot{\psi}=-2.5\times\frac{2\pi}{t}=-2.5\omega$。$\omega_3=-2.5\omega+\omega\times\frac{1}{2}=-2\omega$。$\dot{\psi}$的负号是由于图中圆盘顺时针转向旋转。

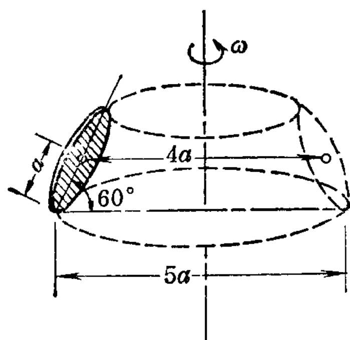


图 5-3

§5-3 阿佩尔方程

设有一 n 个质点的质点系，它有 k 个含时几何约束[式(5-1)]和 r 个运动约束[式(5-2)]。首先我们利用含时几何约束，可以选出 $m=3n-k$ 个独立坐标 q_1、q_2、…、q_m，将质点系的 $3n$ 个直交坐标 x_ν 用 t 和 q_1、q_2、…、q_m 表示出来，如式(5-7)所示。于是可得到式(5-8)和(5-9)。

但是由于尚存在着 r 个运动约束

$$\sum_{\nu=1}^{3n}a_{\rho\nu}\dot{x}_\nu+a_\rho=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,r) \tag{5-2}$$

式中 $a_{\rho\nu}$、a_ρ 是 t 和 $3n$ 个 x_1、x_2、…、x_{3n} 的函数。我们利用式(5-7)和(5-8)，并将其代入式(5-2)，则可将该式写成如下的形式：

$$\sum_{i=1}^{m}A_{\beta i}\dot{q}_i+A_\beta=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,r) \tag{5-11}$$

式中$A_{\beta i}$和A_β都是t和q_1、q_2、…、q_m的函数。所以m个$\dot{q}_1$、$\dot{q}_2$、…、$\dot{q}_m$不是独立的，尚须满足r个方程，因此只有$N=3n-k-r$个$\dot{q}_i$是独立的。为了更一般性，我们可以选N个$\dot{q}_i$的独立线性组合[参 10(b)]:

$$\dot{\pi}_s=\sum_{i=1}^{m}f_{si}\dot{q}_i \qquad (s=1,2,\cdots,N) \tag{5-12}$$

以N个$\dot{\pi}_1$、$\dot{\pi}_2$、…、$\dot{\pi}_N$作为独立量，称为伪速度。选伪速度的条件是式(5-12)与(5-11)的$\dot{q}_i$组成m个线性无关的方程组，即这m个线性式的m个$\dot{q}_1$、$\dot{q}_2$、…、$\dot{q}_m$的系数行列式不为零。因此，我们可由m个方程式(5-11)和(5-12)解出m个$\dot{q}_1$、$\dot{q}_2$、…、$\dot{q}_m$为$\dot{\pi}_1$、$\dot{\pi}_2$、…、$\dot{\pi}_N$的表示式

$$\dot{q}_i=\sum_{s=1}^{N}h_{is}\dot{\pi}_s+h_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{5-13}$$

式中h_{is}、h_i是t和q_1、q_2、…、q_m的函数。将式(5-13)对时间取导数，得

$$\ddot{q}_i=\sum_{s=1}^{N}h_{is}\ddot{\pi}_s+(\dot{\pi}\text{ 和 }\dot{q}\text{ 以及 }t\text{、}q\text{ 的项}) \tag{5-14}$$

由式(5-13)易知，对于虚位移，有

$$\delta q_i=\sum_{s=1}^{N}h_{is}\delta\pi_s \tag{5-15}$$

由动力学普遍方程

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma=1}^{3n}(m_\gamma\ddot{x}_\gamma-X_\gamma)\delta x_\gamma=\\&=\sum_{\gamma=1}^{3n}(m_\gamma\ddot{x}_\gamma-X_\gamma)\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\delta q_i\\&=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(m_\gamma\ddot{x}_\gamma\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\right)-Q_i\right]\delta q_i=0\end{aligned} \tag{5-16}$$

将式(5-8)再对 t 取导数，得

$$\ddot{x}_\gamma=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\ddot{q}_i+\sum_{i=1}^{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial t}\right)$$

由上式两端对 $\ddot{q}_i$ 取偏导数，得

$$\frac{\partial\ddot{x}_\gamma}{\partial\ddot{q}_i}=\frac{\partial x_\gamma}{\partial q_i}$$

于是式(5-16)可以改写为

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(m_\gamma\ddot{x}_\gamma\frac{\partial\ddot{x}_\gamma}{\partial\ddot{q}_i}\right)-Q_i\right]\delta q_i=0$$

上式中 δq_i 不是独立的，必须应用式(5-15)改为伪坐标。

将式(5-15)代入上式，得

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(m_\gamma\ddot{x}_\gamma\frac{\partial\ddot{x}_\gamma}{\partial\ddot{q}_i}\right)-Q_i\right]\sum_{s=1}^{N}h_{is}\delta\pi_s=$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{\gamma=1}^{3n}\left(m_\gamma\ddot{x}_\gamma\frac{\partial\ddot{x}_\gamma}{\partial\ddot{q}_i}\right)-Q_i\right]h_{is}\delta\pi_s=0 \tag{5-17}$$

令式中 $\sum_{i=1}^{m}Q_ih_{is}=\Pi_s$，称为对应于伪坐标 π_s 的广义力。又

$$\sum_{\gamma=1}^{3n}m_\gamma\ddot{x}_\gamma\frac{\partial\ddot{x}_\gamma}{\partial\ddot{q}_i}=\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_i}\left(\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{1}{2}m_\gamma\ddot{x}_\gamma^2\right)=\frac{\partial G}{\partial\ddot{q}_i}$$

式中

$$G=\sum_{\gamma=1}^{3n}\frac{1}{2}m_\gamma\ddot{x}_\gamma^2 \tag{5-18}$$

G 称为加速度能量。因为将加速度 $\ddot{x}_\gamma$ 换成速度 $\dot{x}_\gamma$ 时，G 就成为质点系的总动能表示式，G 亦称吉普斯函数。

于是式(5-17)成为

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_i}-Q_i\right)h_{is}\delta\pi_s=$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_i}\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \ddot{\pi}_s}-\Pi_s\right)\delta\pi_s=0 \qquad (5\text{-}19)$$

上式应用了式(5-18)和 $h_{is}=\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \ddot{\pi}_s}$。又由偏微分规则

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_\nu}\frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \ddot{\pi}_s}=\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_s}$$

所以式(5-19)可改写为

$$\sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_s}-\Pi_s\right)\delta\pi_s=0$$

但 $\delta\pi_s(s=1,2,\cdots,N)$ 是相互独立的，所以由上式可得

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\pi}_s}=\Pi_s \qquad (s=1,2,\cdots,N) \qquad (5\text{-}20)$$

上式称为阿佩尔方程。

由上式可知，这个力学系统有 N 个独立方程，所以称 $N=3n-k-r$ 为这个力学系统的自由度是适当的。

阿佩尔方程的优点是计算简单，因为G中一切不含对 t 的二阶导数的项，都可以弃去不计。为此本书采用弃去不含对 t 的二阶导数项的G函数 G^*。

我们计算质点系动能时，有下述科尼格(König)定理：质点系的总动能等于各质点相对于质心的运动动能之和，加上各质点的质量集中于质心的代表点并以质心的速度而运动时的动能之和。

对于加速度能量式，也有类似的关系式，因为

$$G=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}m_\nu\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_\nu}{dt^2}\right)^2$$

式中 $\boldsymbol{r}_\gamma$ 是质量为 m_γ 的质点的位置矢。由图5-4，有 $\boldsymbol{r}_\gamma=\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}'_\gamma$，$\boldsymbol{r}_C$是质点系的质心的位置矢，$\boldsymbol{r}'_\gamma$ 是质量为 m_γ 的质点相对于 C 的位置矢，于是

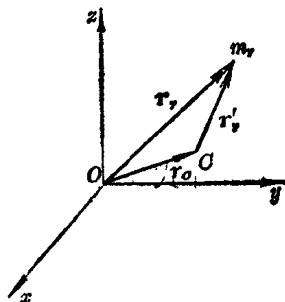


图 5-4

$$G=\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{n} m_\gamma\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}+\frac{d^2\boldsymbol{r}'_\gamma}{dt^2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{n} m_\gamma\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}\right)^2+$$

$$+\frac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}\sum_{\gamma=1}^{n} m_\gamma\frac{d^2\boldsymbol{r}'_\gamma}{dt^2}+\frac{1}{2}\sum_{\gamma} m_\gamma\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}'_\gamma}{dt^2}\right)^2 \tag{5-21}$$

由于

$$\sum_\gamma m_\gamma \boldsymbol{r}'_\gamma=0$$

所以

$$\sum_\gamma m_\gamma\frac{d^2\boldsymbol{r}'_\gamma}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_\gamma m_\gamma \boldsymbol{r}'_\gamma\right)=0$$

因此，式(5-21)的中间一项为零。令$\sum\limits_\gamma m_\gamma=M$，则式(5-21)可写成

$$G=\frac{1}{2}M\boldsymbol{w}_C^2+\frac{1}{2}\sum_\gamma m_\gamma \boldsymbol{w}_{r\gamma}^2 \tag{5-22}$$

式中 $\boldsymbol{w}_C=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}_C}{dt^2}$是质心的加速度，$\boldsymbol{w}_{r\gamma}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}'_{C\gamma}}{dt^2}$ 是质量为 m_γ 的质点相对于质心的加速度。

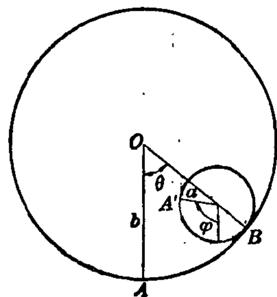


图 5-5

例 5-3 一半径为 a 的实心圆柱，在一内半径为 b 的固定的空心圆柱内滚动，如图5-5

所示。求实心圆柱的运动方程和微振动周期。假定两个圆柱的轴都是水平而且平行的，两者接触足够粗糙而无滑动。

解：约束条件 $\widehat{BA'}=\widehat{BA}$，所以 $a(\theta+\varphi)=b\theta$

即

$$a\varphi=c\theta \quad (c=b-a) \tag{a}$$

$$G=\frac{1}{2}Mw_C^2+\frac{1}{2}\sum_\gamma m_\gamma w_{r\gamma}^2=\frac{1}{2}M(w_{Ct}^2+w_{Cn}^2)+\frac{1}{2}\Sigma m_\gamma(w_{\gamma\tau}^2+w_{\gamma n}^2)=$$

$$=\frac{1}{2}M[(c\ddot{\theta})^2+(c\dot{\theta}^2)^2]+\frac{1}{2}\sum_\gamma m_\gamma[(\rho_\gamma\ddot{\varphi})^2+(\rho_\gamma\dot{\varphi}^2)^2]=$$

$$=\frac{1}{2}Mc^2(\ddot{\theta}^2+\dot{\theta}^4)+\frac{1}{2}(\ddot{\varphi}^2+\dot{\varphi}^4)\sum_\gamma m_\gamma\rho_\gamma^2=$$

$$=\frac{1}{2}Mc^2(\ddot{\theta}^2+\dot{\theta}^4)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\left[\left(\frac{c}{a}\ddot{\theta}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\dot{\theta}^2\right)^2\right]$$

弃去非二阶导数项 $\dot{\theta}^4$，可得 $G^*=\frac{3}{4}Mc^2\ddot{\theta}^2$

主动力只有重力一种，而重力对于虚位移 $\delta\theta$ 作功可计算如下：

$$Mg\delta(c\cos\theta)=-Mgc\sin\theta\delta\theta$$

所以

$$\Pi_\theta=-Mgc\sin\theta$$

于是 $\dfrac{\partial G^*}{\partial\ddot{\theta}}=\Pi_\theta$ 成为

$$\frac{3}{2}Mc^2\ddot{\theta}=-Mgc\sin\theta$$

即

$$\ddot{\theta}+\frac{2g}{3c}\sin\theta=0$$

上式与 $l=\frac{3}{2}c$ 的单摆方程完全相同，所以它的积分可仿照单摆进行，而微振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{b-a}{g}}$$

这是阿佩尔方程应用于完整系统之例。应用于非完整系统时，必须与 r 个运动约束式(5-135)结合，这样共有 m 个方程，可以解出 m 个 q_1、q_2、…、q_m。

例 5-4 求球在固定粗糙平面上无滑动地滚动的运动方程，球心的势函数为 $V(x, y)$[参 11(a)]。

解：设 $Oxyz$ 直角坐标系的 Oxy 平面在固定平面上，球的半径为 a，则球心坐标为 (x, y, a)，因此 $w_C^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$。设有两个直角坐标系，都以球心为原点，一个为 $Cx_1x_2x_3$，它的坐标轴与 $Oxyz$ 的坐标轴平行；另一个是固定于球上的 $C\xi\eta\zeta$，如图 5-6 所示。$C\xi\eta$ 平面与 Cx_1x_2 平面的交线 CN 就是节线。因此欧拉角为：

$$\psi=\widehat{x_1CN},\quad \varphi=\widehat{NC\xi},\quad \theta=\widehat{x_3C\zeta}$$

设球内任一质点 m_i 的坐标为 (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})，则

$$w_{ri}^2=\ddot{x}_{1i}^2+\ddot{x}_{2i}^2+\ddot{x}_{3i}^2$$

$Cx_1x_2x_3$ 和 $C\xi\eta\zeta$ 的坐标变换式为

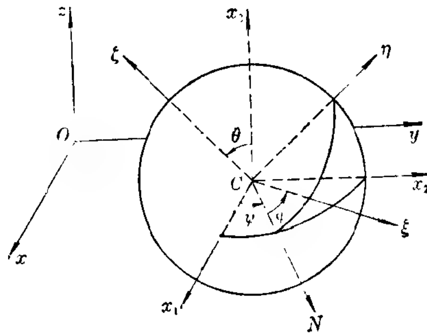


图 5-6

$$x_{ji}=a_{j1}\xi_i+a_{j2}\eta_i-a_{j3}\zeta_i \qquad (j=1, 2, 3) \tag{5-23}$$

式中 (ξ_i, η_i, ζ_i) 对指定质点 m_i 为常量，而 a_{j1}、a_{j2}、a_{j3} 为方向余弦，随 t 而变。将上式对 t 取二次导数，得

$$\ddot{x}_{ji}=\ddot{a}_{j1}\xi_i+\ddot{a}_{j2}\eta_i+\ddot{a}_{j3}\zeta_i \qquad (j=1, 2, 3) \tag{5-24}$$

于是

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i w_{ri}^2=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j=1}^{3}m_i\ddot{x}_{ji}^2-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j=1}^{3}m_i(\ddot{a}_{j1}\xi_i+\ddot{a}_{j2}\eta_i+\ddot{a}_{j3}\zeta_i)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}[\ddot{a}_{j1}^2\Sigma m_i\xi_i^2+\ddot{a}_{j2}^2\Sigma m_i\eta_i^2+\ddot{a}_{j3}^2\Sigma m_i\zeta_i^2]+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}[\ddot{a}_{j1}\ddot{a}_{j2}\Sigma m_i\xi_i\eta_i+\ddot{a}_{j2}\ddot{a}_{j3}\Sigma m_i\eta_i\zeta_i+$$

$$+\ddot{a}_{j3}\ddot{a}_{j1}\Sigma m_i\zeta_i\xi_i]$$

但对均质球体，由于对称性，有：

$$\Sigma m_i\xi_i^2=\Sigma m_i\eta_i^2=\Sigma m_i\zeta_i^2=\frac{1}{2}\Sigma m_i(\xi_i^2+\eta_i^2)=\frac{1}{2}I$$

$$\Sigma m_i\eta_i\zeta_i=\Sigma m_i\xi_i\eta_i=\Sigma m_i\zeta_i\xi_i=0$$

式中 I 为球对于直径的转动惯量，$M=\Sigma m_i$ 为球的质量，于是吉普斯函数为

$$G=\frac{1}{2}M(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)+\frac{I}{4}\sum_{j=1}^{3}(\ddot{a}_{j1}^2+\ddot{a}_{j2}^2+\ddot{a}_{j3}^2) \tag{5-25}$$

上面式中，九个 $\ddot{a}_{j1}$、$\ddot{a}_{j2}$、$\ddot{a}_{j3}$ 不是独立的。刚体绕质心 C 的转动，只有三个自由度，可用欧拉角表示。所以现在要将这九个量写成 φ、θ、ψ 对 t 的二次导数。为此，将 $Cx_1x_2x_3$ 坐标系的三个沿轴的单位矢量表示为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，$C\xi\eta\zeta$ 坐标系的三个沿轴的单位矢量表示为 $\boldsymbol{i}'$、$\boldsymbol{j}'$、$\boldsymbol{k}'$。再添加在 $C\xi\eta$ 平面内垂直于 CN 的垂线 CN_1，在 Cx_1x_2 平面内添加 CN_2 垂直于 CN，沿 CN、CN_1、CN_2 的单位矢量表示为 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 则 Cx_1x_2 绕 x_3 轴转过 ψ，即得 $\widehat{CNN_2}$，所以：

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{n}\cos\psi-\boldsymbol{n}_2\sin\psi$$

$$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{n}\sin\psi+\boldsymbol{n}_2\cos\psi$$

又 CNN_1 绕 ζ 轴转过 φ，得 $\widehat{C\xi\eta}$，所以：

$$\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{n}\cos\varphi+\boldsymbol{n}_1\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{j}'=-\boldsymbol{n}\sin\varphi+\boldsymbol{n}_1\cos\varphi$$

又 CN_2k 绕 n 轴转 θ 角，得 $\widehat{CN_1k'}$。所以：

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}_2\cos\theta+\boldsymbol{k}\sin\theta$$

$$\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{n}_2\sin\theta+\boldsymbol{k}\cos\theta$$

于是：

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11}&=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}'=\cos\psi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta\\
a_{12}&=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}'=-\cos\psi\sin\varphi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta\\
a_{13}&=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}'=\sin\psi\sin\theta\\
a_{21}&=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}'=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta\\
a_{22}&=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}'=-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta\\
a_{23}&=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}'=-\cos\psi\sin\theta\\
a_{31}&=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}'=\sin\varphi\sin\theta\\
a_{32}&=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}'=\cos\varphi\sin\theta\\
a_{33}&=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'=\cos\theta
\end{aligned}\right\}
$$

于是将上式两边对 t 取二次导数后，再代入式(5-25)，可得

$$
\frac{1}{4}I\sum_j(\ddot{a}_{j1}^2+\ddot{a}_{j2}^2+\ddot{a}_{j3}^2)=\frac{1}{2}I[\ddot{\theta}^2+\ddot{\varphi}^2+\ddot{\psi}^2+2\ddot{\varphi}\ddot{\psi}\cos\theta+
$$

$$
+2\sin\theta(\dot{\varphi}\dot{\psi}\ddot{\theta}-\dot{\psi}\dot{\theta}\ddot{\varphi}-\dot{\theta}\dot{\varphi}\ddot{\psi})+\text{不含二次导数的项}] \tag{5-26}
$$

现在求球在水平面上滚而不滑的运动约束方程。这方程可由球与水平面的接触点的速度为零而得到。设C的速度为$\boldsymbol{v}\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},0\right)$，转动角速度为$\boldsymbol{\omega}(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$则

$$
\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times(-a\boldsymbol{k})=0
$$

上式的分量式为：

$$
\left.\begin{aligned}
v_x-a\omega_y=0\\
v_y+a\omega_x=0
\end{aligned}\right\} \tag{5-27}
$$

又将 $\boldsymbol{\omega}$ 沿 $\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{n}$ 分解，得

$$
\boldsymbol{\omega}=\dot{\psi}\boldsymbol{k}+\dot{\varphi}\boldsymbol{k}'+\dot{\theta}\boldsymbol{n}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}
$$

将上式分别点乘以 $\boldsymbol{i}$(即作与 $\boldsymbol{i}$ 的标积)和 $\boldsymbol{j}$，则得：

$$
\begin{aligned}
\omega_x&=\dot{\psi}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+\dot{\varphi}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i})+\dot{\theta}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i})\\
&=\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi\\
\omega_y&=\dot{\psi}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+\dot{\varphi}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{j})+\dot{\theta}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j})\\
&=-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\psi
\end{aligned}
$$

将上式代入式(5-27)，有：

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x}&=a(\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta)\\
\dot{y}&=-a(\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{5-28}
$$

将上式再对 t 取一次导数，然后代入 w_0^2，得

$$\frac{1}{2}M(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)=\frac{1}{2}Ma^2[\ddot{\theta}^2+\ddot{\varphi}^2\sin^2\theta+2\sin\theta(\dot{\varphi}\dot{\psi}\ddot{\theta}-\dot{\psi}\dot{\theta}\ddot{\varphi}$$

$$+\dot{\theta}\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\cos\theta)+\text{不含二次导数的项}] \tag{5-29}$$

G 函数是式(5-29)与(5-26)之和。得到 G 函数以后，代入阿佩尔方程：

$$\frac{\partial G}{\partial\ddot{\theta}}=-\frac{\partial V}{\partial\theta},\quad \frac{\partial G}{\partial\ddot{\varphi}}=-\frac{\partial V}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial G}{\partial\ddot{\psi}}=-\frac{\partial V}{\partial\psi} \tag{5-30}$$

就可以得到三个运动方程。现在先求上面第三式。

$$\frac{\partial G}{\partial\ddot{\psi}}=\frac{I}{2}[2\sin\theta(-\dot{\theta}\dot{\varphi})+2\ddot{\psi}+2\ddot{\varphi}\cos\theta]$$

和

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial\psi}=\frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial V}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial\psi}=0$$

因为由式(5-28)有：

$$dx=a(\sin\psi d\theta-\cos\psi\sin\theta d\varphi)=\frac{\partial x}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial x}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial x}{\partial\psi}d\psi$$

$$dy=-a(\cos\psi d\theta+\sin\psi\sin\theta d\varphi)=\frac{\partial y}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial y}{\partial\varphi}d\varphi+\frac{\partial y}{\partial\psi}d\psi$$

所以，比较 $d\theta$、$d\varphi$、$d\psi$ 的系数，有：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial\theta}=a\sin\psi,\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-a\cos\psi\sin\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\psi}=0\\&\frac{\partial y}{\partial\theta}=-a\cos\psi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=-a\sin\psi\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\psi}=0\end{aligned}\right\} \tag{5-31}$$

于是 $\frac{\partial G}{\partial\ddot{\psi}}=-\frac{\partial V}{\partial\psi}$ 成为

$$\ddot{\psi}-\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta+\ddot{\varphi}\cos\theta=0 \tag{5-32}$$

上式的积分为

$$\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta=C \tag{5-33}$$

式(5-33)为球绕 x_3 轴的动量矩守恒式。

将式(5-32)平方，然后与式(5-29)相加，得

$$\frac{1}{2}M(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)=\frac{1}{2}Ma^2\{\ddot{\theta}^2+\ddot{\varphi}^2+\ddot{\psi}^2+2\ddot{\varphi}\ddot{\psi}\cos\theta+$$

$$+2\sin\theta(\dot{\varphi}\dot{\psi}\ddot{\theta}-\dot{\psi}\dot{\theta}\ddot{\varphi}-\dot{\theta}\dot{\varphi}\ddot{\psi})+\cdots\}$$

可以看出，上式右边括号中的二次导数项完全与式(5-26)的二次导数项相同，所以吉普斯函数可以写成

$$G^*=\frac{1}{2}M(a^2+k^2)\{\ddot{\theta}^2+\ddot{\varphi}^2+\ddot{\psi}^2+$$
$$+2\ddot{\varphi}\ddot{\psi}\cos\theta+2\sin\theta(\dot{\varphi}\dot{\psi}\ddot{\theta}-\dot{\psi}\dot{\theta}\ddot{\varphi}-\dot{\theta}\dot{\varphi}\ddot{\psi})\}$$

将上式代入式(5-30)的前两式得：

$$\left.\begin{aligned}&M(a^2+k^2)(\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta)=-\frac{\partial V}{\partial\theta}\\&M(a^2+k^2)(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)=-\frac{\partial V}{\partial\varphi}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}34)$$

又由式(5-31)有：

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial V}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial\theta}=a\left(\sin\psi\frac{\partial V}{\partial x}-\cos\psi\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=\frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial\varphi}=-a\left(\cos\psi\frac{\partial V}{\partial x}+\sin\psi\frac{\partial V}{\partial y}\right)\sin\theta$$

将上式代入式(5-34)，得到：

$$\left.\begin{aligned}&M(a^2+k^2)(\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta)=-a\left(\sin\psi\frac{\partial V}{\partial x}-\cos\psi\frac{\partial V}{\partial y}\right)\\&M(a^2+k^2)(\ddot{\varphi}+\ddot{\psi}\cos\theta-\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta)=a\left(\cos\psi\frac{\partial V}{\partial x}+\sin\psi\frac{\partial V}{\partial y}\right)\sin\theta\end{aligned}\right\}$$

$$(5\text{-}35)$$

式(5-35)、(5-33)和(5-28)五个微分方程，可用于求解五个未知量 x、y、θ、φ、ψ 为时间 t 的函数。但是这个问题是三个自由度的问题。由于力由势函数 $V(x,y)$ 确定，所以选 x,y,ψ 作为主要变数是最适当的。为此将吉普斯函数再化成用这三变数表示的公式。由式(5-28)可解出：

$$a\dot{\theta}=\dot{x}\sin\psi-\dot{y}\cos\psi$$
$$a\dot{\varphi}\sin\theta=-\dot{x}\cos\psi-\dot{y}\sin\psi$$

将上式对时间 t 取导数，得：

$$a\ddot{\theta}=\ddot{x}\sin\psi-\ddot{y}\cos\psi+(\dot{x}\cos\psi+\dot{y}\sin\psi)\dot{\psi}$$
$$a\ddot{\varphi}\sin\theta+a\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta=-\ddot{x}\cos\psi-\ddot{y}\sin\psi+(\dot{x}\sin\psi-\dot{y}\cos\psi)\dot{\psi}$$

将上两式代入 G，得

$$G=\frac{1}{2}M\left(\frac{a^2+k^2}{a^2}\right)(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+0\ddot{\psi})$$

于是对于 x、y、ψ，阿佩尔方程为：

$$\frac{\partial G}{\partial\ddot{x}}=M\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)\ddot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{y}} = M\left(1+\frac{k^2}{a^2}\right)\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \ddot{\psi}} = 0$$

上式最后一式成为恒等式。从上式看出，球心的运动与质量M集中在C的质点受到“缩小$\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{k^2}{a^2}\right)}$的力”的作用下的运动完全相同。在力是球心$C$位置函数$F(x, y)$的情况下，$F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$，$F_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$可简化成作用于$C$的一个合力，这力对$x_3$轴没有力矩，因此动量矩在$x_3$轴的分量$I\omega_{x3} = I(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)$守恒，如积分式(5-33)。

第六章　利用已知积分的降阶方程

§6-1　利用循环积分的劳思(Routh)降阶方程

N个自由度的质点系的拉格朗日函数 $L(q, \dot{q}; t)$ 表示函数 $L(q_1, q_2, \cdots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N; t)$。但是对于某些力学系统的 L，可能并不包含全部广义坐标 q_1、q_2、…、q_N，即其中缺少了某些 q。现在设 L 中不含 q_1、q_2…、$q_s(s<N)$，那末就有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{6-1}$$

但按拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

所以

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{6-2}$$

于是

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\beta_i(\text{常量}) \qquad (i=1,2,\cdots,s) \tag{6-3}$$

所以L中缺去的广义坐标，都有对应的运动积分——广义动量是常量。由于这种重要特性，我们称L中缺去的广义坐标 q_1、q_2、…、q_s为循环坐标 (Cyclic-coordinate)， 或可遗坐标 (Ignorable coordinate)。

循环坐标这个名称的来源是这样的：一个质点在有心力作用下，以极坐标(ρ, θ)表示的L就是不包含θ，而θ却具有循环的特性，因此我们称式(6-3)为循环积分。

劳思于1876年得到了应用循环积分，将拉格朗日方程降阶的方法，既达到降价的目的，又能使动力学方程仍保持拉格朗日方程的形式。下面讨论这个降阶法。

因L中不含有q_1、q_2、…、q_s，所以上述系统的L的形式如下：

$$L=L(q_{s+1},\cdots,q_N;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots\dot{q}_s,\dot{q}_{s+1},\cdots,\dot{q}_N;t) \tag{6-4}$$

于是由$L=T-V$知道，式(6-3)是各$\dot{q}$的线性式。

$$\beta_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=a_{i1}\dot{q}_1+a_{i2}\dot{q}_2+\cdots a_{is}\dot{q}_s+a_{i,s+1}\dot{q}_{s+1}+\cdots a_{iN}\dot{q}_N$$

$$(i=1,2,\cdots,s) \tag{6-5}$$

式中各a_{ij}仅是$(q_{s+1},\cdots,q_N;t)$的函数，假定行列式

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right|=|a_{ij}|\neq 0 \qquad (i,j=1,2,\cdots,s)$$

那末我们可以自式(6-5)解$\dot{q}_1$、$\dot{q}_2$、…、$\dot{q}_s$为β_1、β_2…、β_s、$\dot{q}_{s+1}$、…、$\dot{q}_N$, t的函数：

$$\dot{q}_i=f_i(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s,\dot{q}_{s+1},\cdots,\dot{q}_N;t) \tag{6-6}$$

现在定义

$$R=L-\sum_{i=1}^{s}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \tag{6-7}$$

为劳思函数，我们应用式(6-6)，可将R中所含有的$\dot{q}_1$、$\dot{q}_2$、…、$\dot{q}_s$全部消去，结果R成为

$$R=R(q_{s+1},\cdots q_N,\dot{q}_{s+1},\cdots,\dot{q}_N;t;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s) \tag{6-8}$$

于是由(6-7)和(6-8)两式，得

$$\delta R=\delta L-\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i-\sum_{i=1}^{s}\dot{q}_i\delta\beta_i=$$

$$=\sum_{r=s+1}^{N}\frac{\partial R}{\partial q_r}\delta q_r+\sum_{r=s+1}^{N}\frac{\partial R}{\partial\dot{q}_r}\delta\dot{q}_r+$$

$$+\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial \beta_r}\delta\beta_r. \qquad (6\text{-}9)$$

但是，由式(6-4)可得变分

$$\delta L=\sum_{r=s+1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r+\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r+\sum_{r=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r$$

将上式代入式(6-9)，移项合并后，得

$$\sum_{r=s+1}^{N}\left(\frac{\partial R}{\partial q_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}\right)\delta q_r+\sum_{r=s+1}^{N}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)\delta \dot{q}_r+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial R}{\partial \beta_i}+\dot{q}_i\right)\delta\beta_i=0$$

现在变分 δq_{s+1}、…、δq_N，$\delta \dot{q}_{s+1}$、…、$\delta \dot{q}_n$，$\delta\beta_1$、…、$\delta\beta_s$ 都是相互独立的，所以上式中各变分的系数必须为零，即：

$$\frac{\partial R}{\partial q_r}=\frac{\partial L}{\partial q_r},\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \qquad (r=s+1,\cdots,N) \qquad (6\text{-}10)$$

和

$$\dot{q}_i=-\frac{\partial R}{\partial \beta_i} \qquad (i=1,2,\cdots,s) \qquad (6\text{-}11)$$

将式(6-10)代入拉格朗日方程，有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial R}{\partial q_r}=0 \qquad (r=s+1,\cdots,N) \qquad (6\text{-}12)$$

上式的形式与拉格朗日方程形式一致，但只留下足标 r 为 $s+1$、$s+2$、…、N 的变数，所以达到了降阶的目的。式(6-12)是$(N-s)$个二阶微分方程，与原N个自由度的拉格朗日方程比较，减少了 s 个二阶微分方程。式(6-11)可用来求出 q_1、q_2、…、q_s 为时间 t 的函数。只要把式(6-11)两端积分，就有

$$q_i=-\int\frac{\partial R}{\partial \beta_i}dt \qquad (i=1,2,\cdots,s) \qquad (6\text{-}13)$$

一个有 n 个质点的质点系（包括刚体）绕 z 轴旋转，如图 6-1 所示。质点 m_i 的坐标为：

$$x_i=r_i\cos\theta_i,\quad y_i=r_i\sin\theta_i,$$

$$z_i=z_i$$

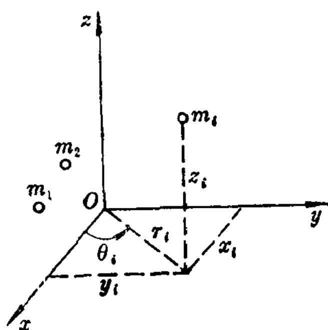


图 6-1

于是有：

$$\dot{x}_i=\dot{r}_i\cos\theta_i+r_i(-\sin\theta_i)\dot{\theta}_i$$

$$\dot{y}_i=\dot{r}_i\sin\theta_i+(r_i\cos\theta_i)\dot{\theta}_i$$

$$\dot{z}_i=\dot{z}_i$$

由此可得

$$T=\sum_i\frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{r}_i^2+r_i^2\dot{\theta}_i^2+\dot{z}_i^2)\quad(6\text{-}14)$$

从上式看出，动能 T 中不明显包含 θ_i，如若

$Q_{\theta i}=-\dfrac{\partial V}{\partial\theta_i}=0$，那末就有 $\dfrac{\partial L}{\partial\theta_i}=\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}(T-V)=0$。

于是 θ_i 就是循环坐标。应用式(6-14)，循环积分成为

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_i}=m_ir_i^2\dot{\theta}_i=\beta_i(\text{常量})\quad(a)$$

但 $m_ir_i^2\dot{\theta}_i$ 是质点m_i 对于 z 轴的角动量。所以一个质点所受的力若对于轴无力矩作用($Q_{\theta i}=0$)，那么这个质点对该轴的角动量为常量。只要 $Q_{\theta i}=0$ 的条件满足，则该结论对质点系的任何质点都成立。因此，若整个质点系无外力矩作用，则总角动量守恒。但是各质点的角速度可以不同，只有刚体上各质点的角速度才相同。

这个问题的劳思函数为

$$R=L-\sum_i\dot{\theta}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}=(T-V)-\sum_i\dot{\theta}_i(m_ir_i^2\dot{\theta}_i)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}m_j(\dot{r}_j^2+\dot{z}_j^2)-\sum_i\frac{1}{2}(m_ir_i^2)\left(\frac{\beta_i}{m_ir_i^2}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r\neq i}m_r(r_r\dot{\theta}_r)^2-V$$

于是式(6-13)成为

$$\theta_i=-\int\frac{\partial R}{\partial\beta_i}dt=\frac{1}{m_ir_i^2}\int\beta_i dt=\frac{\beta_i t}{m_ir_i^2}+\alpha_i$$

上列结果也可以直接应用式(a)求得。

例 6-1 如图 6-2 所示，求对称陀螺在光滑水平面上的运动[参 11(b)]。

解：设 $G\xi\eta\zeta$ 是固结在陀螺上的直交坐标系，ζ 是对称轴，原点 G 就是陀

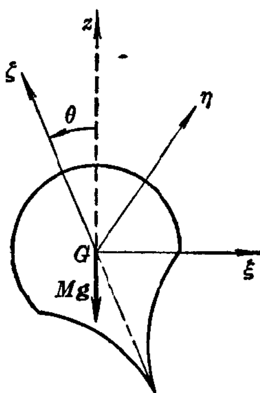


图 6-2

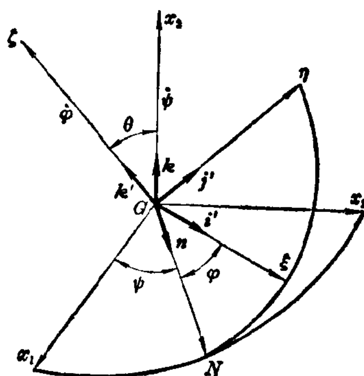


图 6-3

螺的质心，故 ξ、η 和 ζ 就是它的惯性主轴。它们的主惯性矩为 A、B、C，且有 $A=B$。陀螺质心与光滑水平面的距离为 $l\cos\theta$，所以陀螺的势能为

$$V=Mgl\cos\theta$$

G 点的速度为$\frac{d}{dt}(l\cos\theta)=-l\dot{\theta}\sin\theta$，因此陀螺的动能可写成如下形式：

$$T=\frac{1}{2}M(l\dot{\theta}\sin\theta)^2+\frac{1}{2}(A\omega_\xi^2+B\omega_\eta^2+C\omega_\zeta^2)$$

将陀螺的角速度沿 x_3、ζ 和 GN 轴分解，如图6-3所示得

$$\omega=\dot{\psi}\boldsymbol{k}+\dot{\varphi}\boldsymbol{k}'+\dot{\theta}\boldsymbol{n}$$

再将ω投影于 ξ、η、ζ 轴，则有：

$$\begin{aligned}\omega_\xi&=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{i}'=\dot{\psi}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}'+\dot{\varphi}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i}'+\dot{\theta}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}'\\&=\dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\varphi\end{aligned}$$

$$\omega_\eta = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{j}' = \dot{\psi}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}' + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{j}' + \dot{\theta}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}' =$$
$$= \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta + \dot{\theta}(-\sin\varphi)$$
$$\omega_\zeta = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{k}' = \dot{\psi}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}' + \dot{\theta}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}' =$$
$$= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}$$

于是

$$A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2 = A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2$$

所以拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2 -$$
$$- Mgl\cos\theta$$

从上面的L中看出，它没有包含ψ和φ，所以这两个坐标是循环坐标，故有循环积分：

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = A\dot{\psi}\sin^2\theta + C\cos\theta(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = C_1$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = C_2$$

于是，劳思函数为

$$R = L - \dot{\psi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} =$$
$$= \frac{1}{2}(Ml^2\sin^2\theta + A)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2\sin^2\theta - \frac{C}{2}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2 -$$
$$- Mgl\cos\theta$$
$$= \frac{1}{2}(Ml^2\sin^2\theta + A)\dot{\theta}^2 - \frac{(C_1 - C_2\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} - \frac{C_2^2}{2C} - Mgl\cos\theta$$

这样就降阶成只包含一个θ变量的R函数，因此只有一个θ方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial R}{\partial\theta} = 0 \tag{6-15}$$

即

$$\frac{d}{dt}[(Ml^2\sin^2\theta + A)\dot{\theta}] - (Ml^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta) + \frac{C_1 - C_2\cos\theta}{A\sin^2\theta}C_2 -$$
$$- \frac{(C_1 - C_2\cos\theta)^2}{A\sin^3\theta}\cos\theta - Mgl\sin\theta = 0$$

事实上式(6-15)有一积分，相当于能量积分，现求之如下：

将式(6-15)乘以$\dot{\theta}$，则有

$$\dot{\theta}\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial R}{\partial\theta}\dot{\theta}=0$$

即

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}\ddot{\theta}+\frac{\partial R}{\partial\theta}\dot{\theta}\right)=0$$

或为

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{dR}{dt}=0$$

积分上式，得

$$\dot{\theta}\frac{\partial R}{\partial\dot{\theta}}-R=C_3$$

或

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2(Ml^2\sin^2\theta+A)+\frac{(C_1-C_2\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta}+\frac{C_2^2}{2C}+Mgl\cos\theta=C_3 \qquad (6\text{-}16)$$

令：

$$\cos\theta=x,\qquad A=Ma^2,\qquad C=Mc^2,$$

$$2C_3-\frac{C_2^2}{C}=M\gamma_3^2,\qquad C_1=M\gamma_1^2,\qquad C_2=M\gamma_2^2.$$

因$(-\sin\theta)\dot{\theta}=\dot{x}$，所以式(6-16)乘以$2A\sin^2\theta$后可写为

$$a^2[a^2+l^2(1-x^2)]\dot{x}^2=a^2\gamma_3^2(1-x^2)-(\gamma_1^2-\gamma_2^2x)^2-2a^2glx(1-x^2)$$

于是

$$\int\frac{a\sqrt{a^2+l^2(1-x^2)}\,dx}{\sqrt{a^2\gamma_3^2(1-x^2)-(\gamma_1^2-\gamma_2^2x)^2-2a^2glx(1-x^2)}}dx= \qquad (6\text{-}17)$$

$$=t+k$$

再由式(6-13)：

$$\left.\begin{aligned}\psi&=-\int\frac{\partial R}{\partial C_1}dt=\int\frac{(C_1-C_2\cos\theta)}{A\sin^2\theta}dt\\ \varphi&=-\int\frac{\partial R}{\partial C_2}dt=\int\left[\frac{(C_1-C_2\cos\theta)}{A\sin^2\theta}(-\cos\theta)+\frac{C_2}{C}\right]dt\end{aligned}\right\}$$

由式(6-17)求得x为t的函数后，代入上列两式，可以求出ψ和φ。

§6-2 利用能量积分的惠特克(Whittaker)降阶方程

1900年惠特克仿照劳思的方法，得到了应用能量积分的动力

学方程降阶法[参 11(c)]。由式(4-20)，知能量积分为

$$\sum_{j=1}^{N}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L=h \tag{4-21}$$

式中 L 为拉格朗日函数 $L(q_1,\cdots,q_N;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_N)$。注意 L 必须不明显包含 t，于是我们可取任一个广义坐标，例如取 q_1 来代替 t 的作用。将其它广义坐标对 q_1 的导数记为

$$q'_r=\frac{dq_r}{dq_1}\qquad(r=2,3,\cdots,N)$$

则

$$\dot{q}_r=\frac{dq_r}{dt}=\frac{dq_r}{dq_1}\frac{dq_1}{dt}=q'_r\dot{q}_1\qquad(r=2,3,\cdots,N)$$

将上列表达式代入 L 函数中，则 L 变成一个新函数 Ω：

$$L(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N;q_1,q_2,\cdots,q_N)\equiv\Omega(\dot{q}_1,q'_2,q'_3,\cdots,q'_N;$$
$$q_1,q_2,\cdots,q_N)$$

将上式两边分别对 $\dot{q}_1$、$\dot{q}_r(r=2,3,\cdots,N)$ 和 $q_s(s=1,2,\cdots,N)$ 取导数，得：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}+\sum_{r=2}^{N}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\frac{\partial q'_r}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}+\sum_{r=2}^{N}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\right)=$$
$$=\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}-\sum_{r=2}^{N}\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1^2}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \tag{6-18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\frac{\partial q'_r}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\right)=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}\qquad(r=2,3,\cdots,N) \tag{6-19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}=\frac{\partial \Omega}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,3,\cdots,N) \tag{6-20}$$

将式(6-19)代入式(6-18)中，得

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}+\sum_{r=2}^{N}\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}=\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} \tag{6-21}$$

现在要利用能量积分式(4-20)，把 $\dot{q}_r$ 代以 $\dot{q}_1 q'_r (r=2, 3, \cdots, N)$，则能量积分变成 $\dot{q}_1$、q'_2、q'_3、$\cdots q'_N$; q_1、q_2、$\cdots$、q_N 的方程。从这方程解出 $\dot{q}_1$ 得到

$$\dot{q}_1 = f(q'_2, \cdots, q'_N; q_1, q_2, \cdots, q_N)$$

将上式的 $\dot{q}_1$ 代入式(6-21)中，$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}$所形成的函数称为惠特克函数，用$W$表示，即

$$W(q'_2, q'_3, \cdots, q'_N; q_1, q_2, \cdots, q_N) \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \tag{6-22}$$

将上式对 q'_r 取导数，有

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q'_r \partial \dot{q}_1} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \tag{6-23}$$

再对 q_r 取导数有

$$\frac{\partial W}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_r \partial \dot{q}_1} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r} \tag{6-24}$$

现在为了简化上列两式的右端，利用式(6-21)和 $L \equiv \Omega$ 将能量积分式(4-21)改写为

$$\dot{q}_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} = h + \Omega \tag{6-25}$$

将上式看成是 $\dot{q}_1$ 对 q'_2、$\cdots$、q'_N, q_1、q_2、$\cdots$、q_N 的函数关系式，并对q'_r取导数，则得

$$\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} = \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r}$$

弃去两端共同部分，上式简化成

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r}$$

于是式(6-23)成为

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r} = \frac{1}{\dot{q}_1} \frac{\partial \Omega}{\partial q'_r} \tag{6-26}$$

再将式(6-25)对 q_r 取导数，得

$$\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_r}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{q}_1}+\dot{q}_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_1^2}\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_r}+\dot{q}_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_r\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial\Omega}{\partial q_r}+\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_r}\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{q}_1}$$

弃去两端共同部分，上式可简化成

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_1^2}\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_r}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_r\partial\dot{q}_1}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial\Omega}{\partial q_r}$$

于是式(6-24)成为

$$\frac{\partial W}{\partial q_r}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial\Omega}{\partial q_r} \tag{6-27}$$

将式(6-19)与(6-26)比较，式(6-20)与(6-27)比较，得:

$$\frac{\partial W}{\partial q'_r}=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}, \qquad \frac{\partial W}{\partial q_r}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial q_r}$$

将上列两式代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \qquad (r=2, 3, \cdots, N)$$

得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial q'_r}-\dot{q}_1\frac{\partial W}{\partial q_r}=0$$

或

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial W}{\partial q'_r}-\frac{\partial W}{\partial q_r}=0 \qquad (r=2, 3, \cdots, N) \tag{6-28}$$

上式就是要求的惠特克方程，W 中只包含($q'_2, \cdots, q'_N; q_2, q_3, \cdots, q_N, q_1$)，其中 q_1 为相当于时间 t 一样的独立变数。上式只有($N-1$)个二阶微分方程组，达到了降阶的目的(自由度由N降到 $N-1$)。

我们可以联合应用劳思方程和惠特克方程将一个平稳系统的动力学问题降阶。

例 6-2 试将例 6-1 的对称陀螺在光滑水平面上的运动应用惠特克能量积分降价。

解: 能量积分为

$$\frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}A(\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2+Mgl\cos\theta$$
$$=h$$

将

$$\dot{\psi}=\dot{\theta}\psi' \quad 和 \quad \dot{\varphi}=\dot{\theta}\varphi' \tag{a}$$

代入上式得

$$\dot{\theta}^2[Ml^2\sin^2\theta+A(\psi'^2\sin^2\theta+1)+C(\psi'\cos\theta+\varphi')^2]=$$
$$=2[h-Mgl\cos\theta] \tag{b}$$

或

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{2(h-Mgl\cos\theta)}{Ml^2\sin^2\theta+A(\psi'^2\sin^2\theta+1)+C(\psi'\cos\theta+\varphi')^2}} \tag{c}$$

经代换后，L 函数变成 Ω,

$$\Omega=\frac{1}{2}\dot{\theta}^2[Ml^2\sin^2\theta+A(\psi'^2\sin^2\theta+1)+C(\psi'\cos\theta+\varphi')^2]-$$
$$-Mgl\cos\theta \tag{d}$$

于是W函数为

$$W=\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{\theta}}=\dot{\theta}[Ml^2\sin^2\theta+A(\psi'^2\sin^2\theta+1)+C(\psi'\cos\theta+\varphi')^2]$$

惠特克方程为

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial W}{\partial\psi'}-\frac{\partial W}{\partial\psi}=0, \qquad \frac{d}{d\theta}\frac{\partial W}{\partial\varphi'}-\frac{\partial W}{\partial\varphi}=0 \tag{e}$$

由于W中不包含ψ和 φ，因此有循环积分:

$$\left.\begin{aligned}&A\psi'\sin^2\theta+C\cos\theta(\psi'\cos\theta+\varphi')=C_1\\&C(\psi'\cos\theta+\varphi')=C_2\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

或

$$\left.\begin{aligned}&d\psi=\left(\frac{C_1-C_2\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right)d\theta\\&d\varphi=\left[\frac{C_2}{C}-\left(\frac{C_1-C_2\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right)\cos\theta\right]d\theta\end{aligned}\right\}$$

将上两式进行积分，得

$$\left.\begin{aligned}\psi&=\int\frac{C_1-C_2\cos\theta}{A\sin^2\theta}d\theta=\frac{C_1}{A}\left[-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right]-\frac{C_2}{A}(-1)\frac{1}{\sin\theta}+\alpha_1=\\&=\frac{C_2-C_1\cos\theta}{A\sin\theta}+\alpha_1\\\varphi&=\frac{C_2}{C}\theta-\int\frac{(C_1-C_2\cos\theta)}{A\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)C_2\theta+\\&+\frac{C_1-C_2\cos\theta}{A\sin\theta}+\alpha_2\end{aligned}\right\} \tag{g}$$

式(g)中不包含时间，所以这两式是用欧拉角表示的轨迹方程。

应用式(f)可将式(c)中根式的分母改写为

$$Ml^2\sin^2\theta+A+A\psi'\sin^2\theta+C(\psi'\cos\theta+\varphi')^2=$$

$$=Ml^2\sin^2\theta+A+A\sin^2\theta\left(\frac{C_1-C_2\cos\theta}{A\sin^2\theta}\right)^2+C\left(\frac{C_2}{C}\right)^2=$$

$$=Ml^2\sin^2\theta+A+\frac{(C_1-C_2\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}+\frac{C_2^2}{C}$$

于是式(c)可积分得

$$\int\frac{\sqrt{Ml^2\sin^2\theta+A+\dfrac{(C_1-C_2\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}+\dfrac{C_2^2}{C}}}{\sqrt{h-Mgl\cos\theta}}d\theta=\sqrt{2}\,t+\alpha_3$$

第七章　哈密顿—雅科毕方程

§7-1　哈密顿偏微分方程型式动力学方程的推导

设有一个完整系统，它的正则方程为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\right\}\qquad (i=1,2,\cdots,N)\tag{4-94}$$

它的解案是求出 q_i、p_i 为时间 t 的函数，同时也包含 $2N$ 个任意常数 C_1、C_2、…、C_{2N}，这些积分常数可由初始条件确定。因此式 (4-94)的解案可以写为：

$$\left.\begin{aligned}q_i&=q_i(t;C_1,C_2,\cdots,C_{2N})\\ p_i&=p_i(t;C_1,C_2,\cdots,C_{2N})\end{aligned}\right\}\tag{7-1}$$

式中 $i=1$、2、3、…、N。我们知道，H 函数是 p_1、p_2、…、p_N，q_1、q_2、…、q_N，t 的函数，简写为 $H(q,p,t)$。将式(7-1)代入H后，得 $H(C_1,C_2,\cdots,C_{2N};t)$，简记为 $H(C,t)$。于是

$$H(C,t)\equiv H(q,p,t)\tag{7-2}$$

将上式两端对 C_j 取导数得

$$\frac{\partial H}{\partial C_j}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial C_j}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial C_j}\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(-\dot{p}_i\frac{\partial q_i}{\partial C_j}+\dot{q}_i\frac{\partial p_i}{\partial C_j}\right)$$

或改写成

$$\frac{\partial H}{\partial C_j}=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{\partial q_i}{\partial C_j}+\frac{\partial}{\partial C_j}\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i\tag{7-3}$$

但由欧拉齐次函数定理

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i = \Sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q} = 2T_2 + T_1 \tag{7-4}$$

和式(4-96)

$$H = T_2 - T_0 + V$$

所以式(7-3)改写为

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial q_i}{\partial C_j} = \frac{\partial}{\partial C_j}[2T_2 + T_1 - (T_2 - T_0 + V)] = \frac{\partial}{\partial C_j}(T_2 + T_1 +$$

$$+ T_0 - V) = \frac{\partial}{\partial C_j}(T - V) \tag{7-5}$$

令$\frac{dS}{dt} = T - V$，则式(7-5)可写成

$$\frac{\partial}{\partial C_j}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial q_i}{\partial C_j}$$

将上式乘以 δC_j，然后对 $j = 1、2、3、\cdots、2N$ 求总和，得

$$\sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial C_j}\left(\frac{dS}{dt}\right)\delta C_j = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} p_i \left\{\sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial q_i}{\partial C_j}\delta C_j\right\}$$

但

$$\sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial q_i}{\partial C_j}\delta C_j = \delta q_i, \qquad \sum \frac{\partial}{\partial C_j}\left(\frac{dS}{dt}\right)\delta C_j = \delta\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta S)$$

所以

$$\frac{d}{dt}(\delta S) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} p_i \delta q_i$$

积分上式得

$$\delta S = \sum_{i=1}^{N} p_i \delta q_i + C \tag{7-6}$$

C 是积分常数。

将 $2N$ 个 $C_1、C_2、\cdots、C_{2N}$ 分成两组，每组 N 个。一组用 α_j 表

示，另一组用 γ_j 表示，那么式(7-1)的第一式可写为

$$q_i = q_i(t, \alpha, \gamma) \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \tag{7-7}$$

由式(7-7)，可解出 $\gamma_j = \gamma_j(q, \alpha, t)$，代入 S 中，则

$$S(C, t) \equiv S(\alpha, \gamma, t) \equiv S(q, \alpha, t)$$

所以 S 的变分可写为

$$\delta S = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i \tag{7-8}$$

上式与式(7-6)比较，可知 $C = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i$ 必须为常数。因之可令 $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$，$\beta_i$ 为常数，于是：

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i} \\ \beta_i &= \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \end{aligned}\right\} \tag{7-9}$$

α_i 和 β_i 称为正则常数(Canonical constants)。

因

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial S(q_i, \alpha, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

故有

$$\frac{dS}{dt} = T - V = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i \tag{7-10}$$

但由式(7-4)有

$$2T_2 + T_1 = \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i \quad 和 \quad T = T_2 + T_1 + T_0$$

因此

$$\frac{\partial S}{\partial t} + T_2 - T_0 + V = 0 \tag{7-11}$$

又由式(4-96) $T_2-T_0+V=H(q,p,t)$，所以式(7-11)换成H后，再将H中的p_i换成$\frac{\partial S}{\partial q_i}$，则得

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)=0 \tag{7-12a}$$

上式就是要求的哈密顿—雅科毕方程，或更明确地写为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_1,q_2,\cdots,q_N;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\frac{\partial S}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_N};t\right)=0 \tag{7-12b}$$

例 7-1 求行星在太阳引力场中运动的哈密顿—雅科毕方程[参12(a)]。

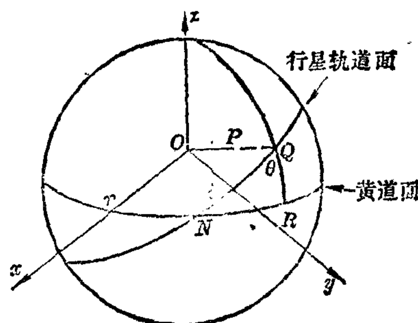


图 7-1

解：如图 7-1 所示，以太阳为原点作一直角坐标系，Oxy 作为黄道面。行星的坐标为(x,y,z)，以λ表示行星的黄经$\widehat{\Upsilon R}$，以θ表示行星的黄纬$\widehat{RQ}$，Ox轴穿过春分点Υ，那么：

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\lambda\cos\theta\\y&=r\sin\lambda\cos\theta\\z&=r\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

于是行星的动能为

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\cos^2\theta\dot{\lambda}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

所以

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}=m\dot{r},\qquad p_\lambda=(mr^2\cos^2\theta)\dot{\lambda},\qquad p_\theta=mr^2\dot{\theta}$$

行星的位能为

$$V=-\frac{\mu m}{r}$$

式中 $\mu=G(m+m_O)$，m_O 为太阳质量。现在T 是 $\dot{r}$、$\dot{\lambda}$、$\dot{\theta}$ 的齐二次式，所以$T=$ $=T_2$，$T_0=0$。于是有 $H=T+V$，故得

$$H(p,q)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\lambda^2}{r^2\cos^2\theta}+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{\mu m}{r} \tag{b}$$

应用式(7-12b)于上式得

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{\partial m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right]-\frac{\mu m}{r}=0 \tag{c}$$

§7-2 雅科毕定理

定理: 若 $S(q_1\alpha, t)$ 是偏微分方程(7-12a)的任一完全积分，其中S表示成时间 t 和广义坐标 q_1、q_2、…、q_N 以及N个任意相互独立的积分常数 α_1、α_2、…、α_N 的函数。那么不论使用怎样方法得到的全积分 $S(q,\alpha,t)$，从式(7-12a)得到的下列方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}&=\beta_i\\ \frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial q_i}&=p_i\end{aligned}\right\}(i=1,2,\cdots,N) \tag{7-13}$$

就是正则方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\right\}\qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

的积分。

证: 由式(7-13)的第一式，各常数 β_i 是相互独立的，可解出

$$q_i=q_i(t,\alpha,\beta)\qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{7-14}$$

将上式代入式(7-13)的第二式，得N个相互独立的 p_i为

$$p_i=p_i(t,\alpha,\beta)\qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{7-15}$$

将式(7-13)的第一式对时间 t 取导数，有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_i}\dot{q}_j=0$$

应用式(7-13)的第二式，上式可化成

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_i}\dot{q}_j=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \qquad (7\text{-}16)$$

把式(7-15)的 p_i 代替方程(7-12a)中的$\frac{\partial S}{\partial q_i}$，然后对 α_i 取导数得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, N) \qquad (7\text{-}17)$$

将上列两式相减得

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}=0 \qquad (j=1, 2, \cdots, N) \qquad (7\text{-}18)$$

因 p_1、p_2、…、p_N 是相互独立的函数，所以行列式

$$\left|\frac{\partial p_j}{\partial \alpha_i}\right|=\frac{\partial(p_1, p_2, \cdots, p_N)}{\partial(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)}\neq 0$$

因此我们可自N个线性齐次方程组式(7-18)得到必须条件

$$\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}=0 \qquad (j=1, 2, \cdots, N) \qquad (7\text{-}19)$$

上式就证明了定理的一半。

再将式(7-13)的第二式对 t 取导数，得

$$\dot{p}_i=\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j$$

应用已经证得的关系式(7-19)，可将上式改写成

$$\dot{p}_i=\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \quad (i=1, 2, \cdots, N) \qquad (7\text{-}20)$$

又将式(7-13a)对 q_i 取导数，注意到H既显含 q_i，又通过p而隐含 q_i，所以

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i}+\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}=0 \qquad (7\text{-}21)$$

但由式(7-13)的第二式，有$\frac{\partial p_j}{\partial q_i}=\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}$，于是比较上列两式，即得到

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

至此，定理已完全证明。

§7-3 特种场合的哈密顿—雅科毕方程

1．H 不显含时间 t

此时 $H\equiv H(p,q)$，因此

$$\frac{dH}{dt}=\Sigma\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\Sigma\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i=\Sigma\dot{q}_i\dot{p}_i+\Sigma(-\dot{p}_i)\dot{q}_i=0$$

所以$H=$常量。令此常数为α_1，则 $H=\alpha_1$。故由式(7-12a)得

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\alpha_1 \text{ 或 } S=-\alpha_1 t+S_1 \qquad (7\text{-}22)$$

式中 S_1 不显含 t。

2．H 中不含某 q_i

即 q_i 为循环坐标，此时由$\frac{\partial H}{\partial q_i}=0$和正则方程可得 $\dot{p}_i=0$，即 $p_i=\alpha_j(j\neq 1)$为常量。于是由式(7-13)第二式有

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\alpha_j$$

积分上式得

$$S=\alpha_j q_i+S_2 \qquad (7\text{-}23)$$

式中 S_2 不含 q_i。

3．H 中不显含 t 和 q_i

结合上述内容，S 可写为

$$S=-\alpha_1 t+\alpha_j q_i+S' \qquad (j\neq 1)$$

式中 S' 不显含 t 和 q_i。

例 7-2 试解例 7-1 中的式(c)。

解: 因本题在例 7-1 中的式(a), H不显含t和λ, 所以按本节, 由式(c)有

$$S=-\alpha_1 t+\alpha_3\lambda+S'(r,\theta)$$

将这 S 代入例 7-1 中的式(c), 得

$$-\alpha_1+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\alpha_3^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial\theta}\right)^2\right]-\frac{\mu m}{r}=0$$

即

$$2mr^2\alpha_1+2\mu m^2 r-r^2\left(\frac{\partial S'}{\partial r}\right)^2=\left(\frac{\partial S'}{\partial\theta}\right)^2+\alpha_3^2\sec^2\theta \tag{d}$$

从上式看出, 如令 $S'(r,\theta)=S_1(r)+S_2(\theta)$, 则将它代入式($d$)后, 即得变数分离式

$$2mr^2\alpha_1+2\mu m^2 r-r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2=\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2+\alpha_3^2\sec^2\theta \tag{e}$$

上式左边是 r 的函数, 右边是 θ 的函数, 两者相等, 必须等于一个常数。现在令它等于 α_2^2, 则式(e)可分成两个微分方程

$$r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2-2\alpha_1 mr^2-2\mu m^2 r+\alpha_2^2=0 \tag{f}$$

和

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2+\alpha_3^2\sec^2\theta=\alpha_2^2 \tag{g}$$

由式(f)得

$$S_1=\int_{r_1}^{r}\sqrt{2\alpha_1 mr^2+2\mu m^2 r-\alpha_2^2}\,\frac{dr}{r} \tag{h}$$

由式(g)得

$$S_2=\int_0^{\theta}\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2\sec^2\theta}\,d\theta \tag{i}$$

令

$$R\equiv 2\alpha_1 mr^2+2\mu m^2 r-\alpha_2^2=0$$

对于行星一定可得到两个实根 r_1、r_2, 并且令 r_1 是较小的一个根, 则由上式得:

$$\left.\begin{aligned} r_1+r_2&=-\frac{\mu m}{\alpha_1} \\ r_1 r_2&=-\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1 m} \end{aligned}\right\} \tag{j}$$

由上式可知 r_1、r_2 是 α_1、α_2 的函数，所以 r_1、r_2 不是新引入的常数。

因为 r_1, r_2 都是正数，所以由式(j)的第一式可知，α_1 必须是负数。这样 R 可写为

$$\sqrt{R}=\sqrt{-2\alpha_1 m}\cdot\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}$$

R 只存在于区间 $r_1\leqslant r\leqslant r_2$，事实上这 r_1 就是椭圆轨道的近日距，r_2 是远日距。

现在应该确定对应于行星坐标(r, λ, θ)的三个常数 β_1、β_2、β_3。因：

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\beta_1, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\beta_2, \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=\beta_3$$

和

$$S=-\alpha_1 t+\alpha_3\lambda+S_1(r)+S_2(\theta)$$

(1) $\beta_1=\dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1}=-t+\dfrac{\partial S_1(r)}{\partial \alpha_1}$

应用式(h)和注意积分下限 r_1 是 α_1 的函数，故按积分的导数公式有

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=-t+\int_{r_1}^{r}\frac{mr\,dr}{\sqrt{R}}-\frac{\partial r_1}{\partial \alpha_1}\left[\frac{1}{r}\sqrt{2\alpha_1 m r^2+2\mu m^2 r-\alpha_2^2}\right]_{r=r_1}$$

上式右边末项为零，因 r_1 是 $R=0$ 之根。于是

$$\beta_1+t=\frac{m}{\sqrt{-2\alpha_1 m}}\int_{r_1}^{r}\frac{r\,dr}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} \tag{k}$$

当行星经过近日点时，$r=r_1$ 积分为零。这个时间表示为 τ，则

$$\beta_1+\tau=0$$

即
$$\tau=-\beta_1$$

常数 r_1、r_2 可另换 a、e 两个常数，表示为：

$$\left.\begin{aligned} r_1&=a(1-e) \\ r_2&=a(1+e) \end{aligned}\right\} \tag{l}$$

这两个常数的意义显然是 a 为半长轴，e 为偏心率。

将式(l)代入式(j)得：

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1&=-\frac{\mu m}{2a} \\ \alpha_2&=m\sqrt{\mu a(1-e^2)} \end{aligned}\right\} \tag{m}$$

要积分式(k)，可用变数变换 $r-a(1-e\cos E)$。

当 $E=0$ 时，$r=r_1$，故 E 和为偏近点角，于是：

$$r-r_1=ae(1-\cos E),\qquad r_2-r=ae(1+\cos E),\qquad dr=ae\sin E dE$$

因为式(k)成为

$$\sqrt{\frac{-2\alpha_1}{m}}(\beta_1+t)=a\int_0^E(1-e\cos E)dE$$

对上式积分之，

$$E-e\sin E=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{-2\alpha_1}{m}}(t+\beta_1)=n(t-\tau)$$

上式是著名的开普勒方程，其中

$$n=\frac{2\pi}{T}=\frac{\sqrt{-2\alpha_1}}{a\sqrt{m}}$$

是行星的平均角速度。

将上式与式(m)的第一式联合进行计算，消去 α_1，即得 $\mu=n^2a^3$，这就是开普勒第三定律。

(2) 积分$\frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=\beta_3$

因 $$S=-\alpha_1 t+\alpha_3\lambda+S_1(r)+S_2(\theta)$$

故

$$\beta_3=\frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=\lambda+\frac{\partial S_2}{\partial \alpha_3}=\lambda-\alpha_3\int_0^\theta\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2\sec^2\theta}}=$$

$$=\lambda-\int_0^\theta\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{\frac{\alpha_2^2-\alpha_3^2}{\alpha_3^2}-\operatorname{tg}^2\theta}}$$

要上式积分存在，被积函数的分母根号中的式必须大于0。由此可知

$$|\alpha_2|>|\alpha_3|$$

故可令

$$\alpha_2^2-\alpha_3^2=\alpha_3^2\operatorname{tg}^2\varphi \tag{n}$$

则有

$$\beta_3=\lambda-\int_0^\theta\frac{d\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\right)}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\varphi}}}=\lambda-\sin^{-1}\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\right) \tag{o}$$

所以

$$\sin(\lambda-\beta_3)=\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\varphi$$

或改为

$$\sin\lambda\cos\theta\cos\beta_3-\cos\lambda\cos\theta\sin\beta_3=\sin\theta\operatorname{ctg}\varphi$$

上式乘以 r，再应用例 7-1 的式(a)，则成为

$$y\cos\beta_3-x\sin\beta_3=z\operatorname{ctg}\varphi$$

由上式可见，行星的坐标(x, y, z)恒在通过原点的平面上。

从表达式 $\sin(\lambda-\beta_3)=\tan\theta\operatorname{ctg}\varphi$ 看出，当 $\theta=0$ 时，上式的右边为 0，即 $\sin(\lambda-\beta_3)=0$，故必有 $\lambda-\beta_3=0°$ 或 $180°$。前者为行星的升交点，后者为行星的降交点。如将升交点的黄经 λ 表示为Ω，则有

$$\Omega=\beta_3$$

由式(o)，sin 最大值为 1，因此可见 θ 的最大值为 φ。此时 φ 为行星轨道面的倾角 i，于是由式(n)，知 $\alpha_3=\alpha_2\cos i$

或

$$\alpha_3=m\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i$$

(3) $$\beta_2=\frac{\partial S}{\partial\alpha_2}=\frac{\partial S_2(\theta)}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial S_1(r)}{\partial\alpha_2}=\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_0^\theta\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2\sec^2\theta}\,d\theta+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\int_{r_1}^r\sqrt{2\alpha_1mr^2+2\mu m^2r-\alpha_2^2}\frac{dr}{r}=$$

$$=\alpha_2\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2\sec^2\theta}}-\alpha_2\int_{r_1}^r\frac{dr}{r\sqrt{R}}-\frac{\partial r_1}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\sqrt{R}}{r}\right)_{r=r_1}\qquad(p)$$

上式右端的末项为 0，第一个积分用 I_1 表示，则

$$I_1=\alpha_2\int_0^\theta\frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\alpha_2^2-\alpha_3^2-\alpha_3^2\sin^2\theta}}=\int_0^\theta\frac{d\left(\frac{\sin\theta}{\sin i}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta}{\sin i}\right)^2}}=$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\sin i}\right)$$

而由图 7-1，球面三角形 QNR 中有$\frac{\sin\theta}{\sin i}=\sin\widehat{NQ}$，所以 $I_1=\widehat{NQ}$。

式(p)中的第二个积分表为 I_2，则

$$I_2=\frac{\alpha_2}{\sqrt{-2\alpha_1m}}\int_{r_1}^r\frac{dr}{r\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}}$$

用 $r=a(1-e\cos E)$ 作变换，如前面的式(i)，则

$$I_2=\sqrt{1-e^2}\int_0^E \frac{dE}{1-e\cos E}$$

应用 $\cos E=\dfrac{1-\left(\operatorname{tg}\dfrac{E}{2}\right)^2}{1+\left(\operatorname{tg}\dfrac{E}{2}\right)^2}$，则上式成为

$$I_2=\sqrt{\frac{1-e^2}{1-e}}\int_0^E \frac{\sec^2\dfrac{E}{2}dE}{1+\dfrac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\dfrac{E}{2}}$$

令 $\operatorname{tg}\dfrac{f}{2}=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\dfrac{E}{2}$，则上式可写为

$$I_2=2\int_0^f \frac{d\left(\operatorname{tg}\dfrac{f}{2}\right)}{1+\left(\operatorname{tg}\dfrac{f}{2}\right)^2}=f \qquad (f\text{ 是真近点角})$$

E、f 角如图 7-1 所示，A 为近日点，c 为椭圆轨道中心，O表示太阳，P 是行星位置。所以由图 7-2 有

$$\beta_2=\widehat{NQ}-\widehat{AQ}=\widehat{NA}=\omega$$

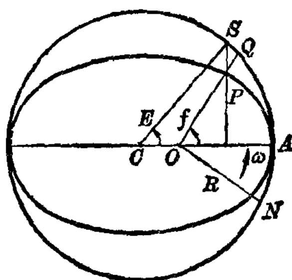


图 7-2

ω 表示天球上近日点离开升交点的角度。

于是 α_1、α_2、α_3 和 β_1、β_2、β_3 都已求出，汇集如下：

$$\alpha_1=-\frac{\mu m}{2a}, \qquad \beta_1=-\tau$$

$$\alpha_2=m\sqrt{\mu a(1-e^2)}, \qquad \beta_2=\omega$$

$$\alpha_3=m\sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i, \quad \beta_3=\Omega$$

对于平稳系统，由§7-31，$\frac{\partial S}{\partial t}=-\alpha_1=-E$，所以哈密顿—雅科毕方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(p,q)=0$$

成为

$$H(p,q)=E$$

如果将

$$p_x\longrightarrow\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k},\ E\longrightarrow\frac{-h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}$$

代入上式，将它作为一种算符，作用到波函数ψ上，就成为

$$H\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_N},x_1,\cdots,\ x_N\right)\psi=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

上式就是波动力学的薛定谔方程。

第三篇　力学的变分原理

变分原理具有充分的普遍性，它对所属力学中的命题在指定条件下是最基本的，其它的有关力学中的知识都可以从它用逻辑推理演导出来。例如朗道(Landun)等著的《力学》，就是用哈密顿最小作用原理作基础演绎而成的。在一门科学的发展中，把它归结为最少数的原理，这种意图是建立在审美观点和追求最普遍的自然定律的基础上的。不但如此，它也有助于我们开展新领域，发现新事物。

变分原理可以有微分式和积分式两类。

第八章　微分原理

§8-1　高斯最小约束原理

1829 年数学家高斯导得了最小约束原理：对于某 t 时的同一位形和速度的一个力学系统，$\ddot{x}(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \cdots, \ddot{x}_n)$ 的函数

$$C=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}m_r\left(\ddot{x}_r-\frac{X_r}{m_r}\right)^2 \tag{8-1}$$

对于真实运动的 C 是最小值。

证：设 $\ddot{x}$ 是真实运动的加速度，$\ddot{x}+\Delta\ddot{x}$ 是约束容许下可能实行的加速度，那么

$$\Delta C=\frac{1}{2}\Sigma m\left\{\left(\ddot{x}+\Delta\ddot{x}-\frac{X}{m}\right)^2-\left(\ddot{x}-\frac{X}{m}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\Sigma m(\Delta\ddot{x})^2+\Sigma(m\ddot{x}-X)\Delta\ddot{x}$$

应用动力学方程第三种基本形式: $\Sigma(m\ddot{x}-X)\Delta\ddot{x}=0$, 所以

$$\Delta C=\frac{1}{2}\Sigma m(\Delta\ddot{x})^2>0$$

除非 $\Delta\ddot{x}=0$。定理证毕[参 3(*e*)]。

现在来说明 C 的物理意义。设一个力学系统的某质点 m_i, 在 t 时的位置在 M_r, 经短时间 τ, 如无力的作用, 将沿 $\boldsymbol{v}_r$ 运动到 A_r, 得位移 $\boldsymbol{v}_r\cdot\tau$, 如图8-1 所示。由于有主动力 $\boldsymbol{X}_r$ 作用, 质点经过时间 τ 后运动到 B_r 位置, 其位移为

$$\overrightarrow{M_rB_r}=\boldsymbol{v}_r\cdot\tau+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{X}_r}{m_r}\tau^2$$

但是由于尚有约束力 $\boldsymbol{N}_r$ 的作用, 真实位移为

$$\overrightarrow{M_rC_r}=\boldsymbol{v}_r\tau+\frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{x}}_r\tau^2$$

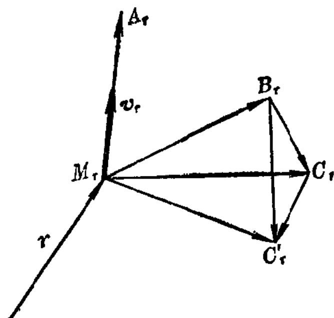


图 8-1

将上面两式相减得

$$\overrightarrow{B_rC_r}=\overrightarrow{M_rC_r}-\overrightarrow{M_rB_r}=\frac{1}{2}\tau^2\left(\ddot{\boldsymbol{x}}_r-\frac{\boldsymbol{X}_r}{m_r}\right)$$

但

$$\boldsymbol{N}_r+\boldsymbol{X}_r=m_r\ddot{\boldsymbol{x}}_r \qquad (r=1,2,\cdots,N)$$

所以

$$C=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}m_r\left(\ddot{\boldsymbol{x}}_r-\frac{\boldsymbol{X}_r}{m_r}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}m_r\left(\frac{\boldsymbol{N}_r}{m_r}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\frac{N_r^2}{m_r}=2\frac{1}{\tau^4}\sum_{r=1}^{N}m_r\overline{B_rC_r}^2 \tag{8-2}$$

如果质点 m_r 有任意假想可能位移 $\overrightarrow{B_rC'_r}$, 那么高斯原理肯

定了

$$C'=2\frac{1}{\tau^4}\sum_{r=1}^{N}m_r\overline{B_rC'_r}^2>C$$

关于C'一定比C大的理由可说明如下:

设$\overrightarrow{M_rC'_r}$是约束许可下的虚位移，由图 3-1, $\overrightarrow{B_rC'_r}=\overrightarrow{B_rC_r}+\overrightarrow{C_rC_r'}$。将此式两端平方,得

$$\overline{B_rC'_r}^2=\overline{B_rC_r}^2-2\overrightarrow{B_rC_r}\cdot\overrightarrow{C_rC_r'}+\overline{C_rC'_r}^2$$

于是对虚位移的C',有

$$C'=\frac{2}{\tau^4}\Sigma m_r\overline{B_rC_r'}^2=\frac{2}{\tau^4}\Sigma m_r\left(\overline{B_rC_r}^2+2\overrightarrow{B_rC_r}\cdot\overrightarrow{C_rC_r'}+\overline{C_rC'_r}^2\right)=$$

$$=C+\frac{4}{\tau^4}\Sigma m_r\overrightarrow{B_rC_r}\cdot\overrightarrow{C_rC'_r}+\frac{2}{\tau^4}\Sigma m_r\overline{C_rC'_r}^2$$

但

$$\Sigma m_r\overrightarrow{B_rC_r}\cdot\overrightarrow{C_rC'_r}=\Sigma m_r\left[\frac{\tau^2}{2}\left(\ddot{\boldsymbol{x}}_r-\frac{\boldsymbol{X}_r}{m_r}\right)\right]\cdot\delta\boldsymbol{x}_r=$$

$$=\frac{\tau^2}{2}\Sigma(m_r\ddot{\boldsymbol{x}}_r-\boldsymbol{X}_r)\cdot\delta\boldsymbol{x}_r=0\quad[\text{应用式(3-3)}]$$

所以

$$C'=C+\frac{2}{\tau^4}\Sigma m_r\overline{C_rC'_r}^2>C$$

因为

$$\frac{2}{\tau^4}\Sigma m_r\overline{C_rC'_r}^2>0$$

由于C与N_r有关系式(8-2),所以这原理称为最小约束原理。

高斯原理对于求解动力学问题很有用处。

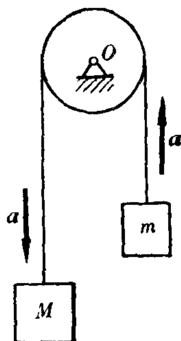


图 8-2

例 8-1 Atwood 机械——如图 8-2所示,大小两物块的质量为M、m,以不能伸长的柔索连接,而柔索跨在光滑而且

很轻的定滑轮上，求其加速度 a。

解： 因

$$C=\frac{1}{2}\{M(a-g)^2+m(-a-g)^2\}$$

故

$$\frac{dC}{da}=M(a-g)-m(-a-g)=0$$

解得

$$a=\frac{M-m}{M+m}g$$

例 8-2 求例 2-11 的两三角块的加速度。

解： $C=\frac{1}{2}[Mw_B^2+m\{(w_{rA}\cos\alpha-w_b)^2+(w_{rA}\sin\alpha-g)^2\}]$

$$\frac{\partial C}{\partial w_b}=Mw_B+m(w_{rA}\cos\alpha-w_B)(-1)=0$$

$$\frac{\partial C}{\partial w_{rA}}=m(w_{rA}\cos\alpha-w_B)\cos\alpha+m(w_{rA}\sin\alpha-g)\sin\alpha=0$$

解得:

$$w_A=\frac{(M+m)\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}g,\quad w_B=\frac{g}{2}\frac{m\sin 2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$$

例 8-3 如图 8-3所示，一个水平放置的圆盘，半径为 a，质量为 M，这圆盘可绕穿过其中心的铅垂轴转动。今在其边缘上一点作用一切向力 $\boldsymbol{F}$，试用最小约束原理，导出动力学方程 $Fa=J\varepsilon$。

解： 将力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点处的小质块 Δm 与圆盘分离。如不考虑（分布力）重力，那么 $M-\Delta m$ 的圆盘无主动力 $\boldsymbol{X}$ 作用，而质块 Δm 则有力 $\boldsymbol{F}$ 作用，所以

$$C=\frac{1}{2}\Sigma m_i\left(\ddot{x}_i-\frac{X_i}{m_i}\right)^2=$$

$$=C_\tau+C_n=\frac{1}{2}\Sigma m_i(r_i\varepsilon)^2+\frac{1}{2}\Delta m\left(a\varepsilon-\frac{F}{\Delta m}\right)^2+C_n=$$

$$=\frac{1}{2}[\Sigma m_i r_i^2+\Delta m a^2]\varepsilon^2-aF\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{F^2}{\Delta m}+C_n=$$

$$=\frac{1}{2}J\varepsilon^2-aF\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{F^2}{\Delta m}+C_n$$

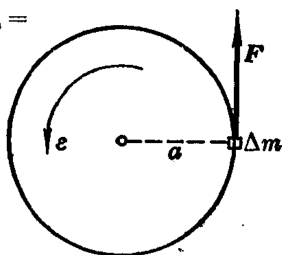


图 8-3

于是动力学方程为

$$\frac{\partial C}{\partial \varepsilon}=J\varepsilon-aF=0$$

§8-2 赫兹最小曲率原理

1894 年出版的赫兹著的《力学原理》中提出了以高斯原理为基础的最小曲率原理：服从平稳约束、且无主动力作用的质点系，在多维空间的代表点的真实运动具有不变的速度；而且它在多维空间运动的轨迹，与约束所允许的其它轨迹比较，真实运动的轨迹曲率最小。

证： 因 $X_r=0$，所以由式(8-1)有

$$C=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}m_r\ddot{x}_r^{\,2}$$

按高斯原理，这C值对真实运动为极小。令总质量$\sum\limits_{r=1}^{N}m_r=M$，作变换 $\xi_r=\sqrt{\dfrac{m_r}{M}}\,x_r$，则

$$C=\frac{1}{2}M\sum_{r=1}^{N}\ddot{\xi}_r^{2}$$

在N维空间中的弧长 ds 定义为 $ds^2=\sum\limits_{r=1}^{N}d\xi_r^{\,2}$，则代表点的速度为

$$\dot{s}=\sqrt{\sum\dot{\xi}_r^{\,2}}$$

仿照三维空间曲率 k 的定义：$k^2=\sum\limits_{r=1}^{3}\left(\dfrac{d^2x_r}{ds^2}\right)^2$，则$N$维空间的曲率定义为

$$k^2=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{d^2\xi_r}{ds^2}\right)^2$$

因 $\dot{\xi}_r=\dfrac{d\xi_r}{ds}\dot{s}$，所以

$$\ddot{\xi}_r = \frac{d^2\xi_r}{ds^2}\dot{s}^2 + \frac{d\xi_r}{ds}\ddot{s}$$

因此

$$C = \frac{M}{2}\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{d^2\xi_r}{ds^2}\dot{s}^2 + \frac{d\xi_r}{ds}\ddot{s}\right)^2$$

由于不受主动力作用，质点系的总动能不变，所以代表点的动能$\frac{1}{2}M\dot{s}^2$为常量，即$\dot{s}$为常量。因而$\ddot{s}=0$。于是上式变成

$$C = \frac{M}{2}\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\dot{s}^2\right)^2 = \frac{M}{2}\dot{s}^4\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right)^2 = \frac{M}{2}\dot{s}^4k^2$$

由上式可知，当C为极小值时，k也是极小。至此原理得证。

赫兹的概念是将牛顿惯性定律扩充到质点系不受主动力作用的情况。

第九章　积 分 原 理

§9-1　哈密顿原理

凡是学过变分学的都知道，如图9-1所示，在通过 Oxy 平面上两个固定点 $P_0(x_0,\ y_0)$、$P_1(x_1,\ y_1)$ 的一切曲线 $y=f(x)$ 中、能使积分

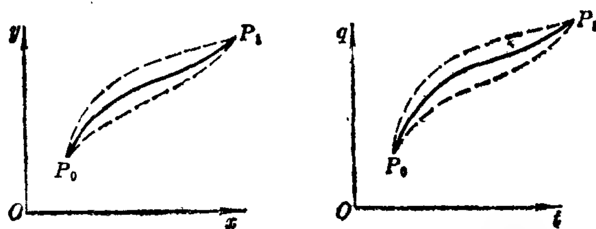


图 9-1

$$I=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx \tag{9-1}$$

为极值的曲线，必须适合下列微分方程：

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{9-2}$$

上式称为欧拉方程，式(9-1)中函数 F 是 x、y、$\frac{dy}{dx}$ 的已知函数。式(9-2)中的 $y'=\frac{dy}{dx}$。

将式(9-2)与拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{9-3}$$

比较，可以看出(9-2)和(9-3)两式，只要将变数更换：$x\longleftrightarrow t$，

$F \longleftrightarrow L, y \longleftrightarrow q$, 就可以从式(9-2)得到式(9-3)。由此可见，力学中的拉格朗日方程，也可以从

$$w = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\, dt \tag{9-4}$$

为极值的条件得来。在变分学中，求泛函的极值问题，可由式(9-4)的一次变分为零得来，其表示式常写成

$$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = 0$$

对于多自由度的保守力学系统

$$L = L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N; q_1, q_2, \cdots, q_N; t) \tag{9-5}$$

从 t_0 时过点 $(q_{10}, q_{20}, q_{30}, \cdots, q_{N0})$ 到 t_1 时过点 $(q_{11}, q_{21}, \cdots, q_{N1})$ 的所有曲线 $(q_1, q_2, \cdots, q_N)$ 中能使

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \tag{9-6}$$

的那一条曲线上的 L 函数，必满足拉格朗日微分方程组

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \cdots, N) \tag{9-7}$$

现在直接推导如下：因为 t_0、t_1 固定，所以积分的上下限不必进行变分而有

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r \right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{N} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right) - \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} \right] \delta q_r \right\} dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{N} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} \right] \delta q_r dt$$

由于 t_0、t_1 的 q_{r0}、q_{r1} 固定，所以 $\delta q_r|_{t_0} = 0$, $\delta q_r|_{t_1} = 0$。因此，上式的第一项为零，而留下

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = -\int_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}\right]\delta q_r dt$$

从上式可见，当式(9-7)成立时，则有 $\delta\int L dt=0$。反之，由$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt=0$，则由于各 δq 的相互独立性，上式积分中的被积函数必须为零，这便得出拉格朗日方程。

因此，保守力学系统的运动规律，可由

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt=0$$

得来，这就是哈密顿原理(1834 年)。

哈密顿原理也可推广到非保守系统，在此讨论从略。

哈密顿原理不但是把力学包含在一个极值化的原理中，而且可以推广到新的科学领域中去。例如在电动力学中，

$$L=\int\left[\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)^2-\frac{1}{8\pi}(\mathrm{curl}\boldsymbol{A})^2+\frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{j}}{c}-\rho\varphi\right]dV$$

就可以从$\int L dt$ 的一次变分为零，得到电动力学的基本方程——马克思韦尔方程组[参 7]。

拉格朗日方程的成立使积分(9-4)为极值，然而究竟是极大抑或是极小值？这要看两个端点(t_0, q_0)、(t_1, q_1)在(t, q)平面上的位置的远近而定。若把一点(t_0, q_{r0})固定，从这点出发而另作其它一个邻近的真实轨迹。当两者在始点的交角 $\theta\to 0$ 时，这两个真实轨道可能相交于另一点 B。这 B 点称为动焦点(Kinetic focus)，如图 9-2 所示。如果(t_1, q_1)点在 B 点之内，则可以证明该积分是极小值(参 9)。

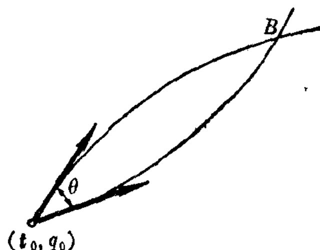


图 9-2

§9-2 莫培督(Maupertuis)—拉格朗日最小作用原理

1744 年莫培督为了用微粒说来理解光的本性，因此，他想用一个质点的运动来解释光学中著名的弗马特(Fermat)原理，于是他得到了对于一个质点的最小作用原理：对质点的真实运动来说，沿着轨迹上任意两点(P_0, P_1)间的线积分$\int_{P_0}^{P_1} v ds$与沿着通过同样两点的其它曲线的积分比较起来是极小。

欧拉理解莫培督发现这个原理的重要性，并想给予严格证明。但他只对质点在中心力场的情况作了证明。直到 1760 年，才由拉格朗日给出了严格证明并加以推广。

以T表示力学系统的总动能，则下列函数S称为拉格朗日作用量：

$$S=\int_0^t 2T dt=\int_0^t \sum_{i=1}^{3n} m_i v_i^2 dt \tag{9-8}$$

拉格朗日原理：对平稳保守力学系统，两相形① A和B之间的真实运动与其它运动学上容许的轨道比较起来，若两相形间能量h是相同的，那么真实运动的拉格朗日作用量S具有极值。上面叙述的原理可用数学式表示为

$$\Delta\int_0^t 2T dt=\Delta S=0 \tag{9-9}$$

式中Δ是全变分记号，它与等时变分δ不同。现先证明如下：

因广义坐标q是时间t的函数，所以q的全变分可以分为两部分，一部分是等时变分δ，另一部分是由时间的变分Δt而引起的变分$\frac{dq}{dt}\Delta t$，所以

$$\Delta q=\delta q+\frac{dq}{dt}\Delta t \tag{9-10}$$

① 在相空间($q_1, q_2\cdots, q_N$; $p_1, p_2, \cdots, p_N$)的位形用“相形”这个术语。

上式对任何时间函数 q 都适用。若将其对 t 取导数，则有

$$\frac{d}{dt}\Delta q=\frac{d}{dt}\delta q+\frac{d^2q}{dt^2}\Delta t+\frac{dq}{dt}\frac{d}{dt}\Delta t \tag{9-11}$$

又依照式(9-10)，用$\frac{dq}{dt}$代q，得

$$\Delta\frac{dq}{dt}=\delta\frac{dq}{dt}+\frac{d^2q}{dt^2}\Delta t$$

δ 和$\frac{d}{dt}$是可以交换的(附录 II)，因此将上式代入式(9-11)，

有
$$\frac{d}{dt}\Delta q=\Delta\frac{dq}{dt}+\frac{dq}{dt}\frac{d}{dt}\Delta t \tag{9-12}$$

当$\frac{d}{dt}\Delta t\neq 0$ 时，从上式可以看出，$\frac{d}{dt}$和 Δ 是不能交换的。对时间本身，Δdt 和 $d\Delta t$ 没有区别。

现在证明拉格朗日原理如下：

将拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \qquad (r=1,2,\cdots,N)$$

乘以 Δq_r，然后对N个方程求总和，得

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta q_r-\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_r}\Delta q_r=0 \tag{9-13}$$

但

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)\Delta q_r=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta q_r\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\frac{d}{dt}\Delta q_r=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta q_r\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\left(\Delta\frac{dq_r}{dt}+\frac{dq_r}{dt}\frac{d}{dt}\Delta t\right)$$

现将上式代入式(9-13)，移项并交换 Σ 和$\frac{d}{dt}$的次序，得

$$\frac{d}{dt}\Sigma\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta q_r\right)=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\Delta q_r+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta \dot{q}_r\right)+\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r\frac{d}{dt}\Delta t \tag{9-14}$$

由于是平稳系统，L是 q_r、$\dot{q}_r$ 的函数，故

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\Delta q_r+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta \dot{q}_r\right)=\Delta L=\Delta(T-V)=\Delta[2T-(T+V)]=$$

$$=\Delta 2T-\Delta h=\Delta 2T$$

因总机械能 $h=T+V=$常量，又因平稳系统的T是 $\dot{q}_r$ 的两次齐函数，应用欧拉齐次函数定理，有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\dot{q}_r=2T$$

于是式(9-14)可以写成

$$\frac{d}{dt}\left(\Sigma\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta q_r\right)=\Delta(2T)+2T\frac{d}{dt}\Delta t$$

将上式乘以 dt，然后自 0 到 t 积分，得

$$\left[\Sigma\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\Delta q_r\right]_0^t=\int_0^t\Delta(2T)\,dt+\int_0^t 2T d(\Delta t)=$$

$$=\int_0^t\Delta(2T)\,dt+\int_0^t 2T\Delta(dt)=\int_0^t\Delta(2T\,dt)=$$

$$=\Delta\int_0^t 2T\,dt=\Delta S$$

但因 $\Delta q_r\Big|_0^t=0$，所以$\Delta S=0$，得证。

对于一个质点，令 ds 是质点在路径上的弧元，那么莫培督原理可写为

$$\Delta S=\Delta\int_0^t mv^2dt=\Delta\int_0^t m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2dt=\Delta\int_0^t mvds=0$$

或

$$\Delta\int_0^t vds=0 \tag{9-15}$$

十七世纪法国数学家弗马特得到一个光线进行的原则：即光线在空间中自 P_0 至 P_1 所经过的路线与其它可能的路线比较，真实路径所经过的时间最小。用公式表示为

$$\Delta\int_{P_0}^{P_1}\frac{ds}{u}=0 \tag{9-16}$$

式中 u 是光波速度，它随空间中介质的折射率 n 而变。把光子视为粒子，比较上两原则，知道 v 与$\frac{1}{u}$有一比例关系为

$$v\propto\frac{1}{u}$$

通过这个关系，式(9-15)和(9-16)成为同一原则。1924 年法国物理学家德布罗意(de Broglie)按照这一光和粒子的平行关系，提出了物质波的理论。该理论是 1926 年薛定谔进一步建立"波动力学"的先导。

§9-3 最小作用原理的雅科毕方程

由于保守系统存在着能量积分 $T+V=h$，式中 h 是总机械能，它是常量。所以

$$2(h-V)=2T=\sum_i m_i v_i^2=\sum_i m_i\left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2$$

由此得

$$dt=\frac{\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2}}{\sqrt{2(h-V)}}$$

于是有

$$S=\int_0^t 2T dt=\int_A^B\sqrt{2(h-V)}\cdot\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2} \tag{9-17}$$

如果改用广义坐标

$$2(h-V)\sum_{i=1}^{3n}m_i(ds_i)^2=\sum_{r,s}^{N}a_{rs}dq_r dq_s$$

把
$$\sum_{r \cdot s}^{N} a_{rs} dq_r dq_s = d\sigma^2$$
看成N维$(q_1, q_2, \cdots, q_N)$空间中的弧元 $d\sigma$ 的平方，则S成为通过A、B 两点的路径积分，因此式(9-17) 可改 Δ 为 δ，即

$$\delta S = \delta \int_A^B d\sigma = 0$$

也就是完整系统在保守力作用下的一般运动，可以看成是N维曲线坐标空间黎曼(Riemann) 空间中沿短程线运动的问题。这样，用曲面上的短程线的几何观点来叙述力学原则，消除了力的概念。这种思想，爱因斯坦曾应用于广义相对论上。在引力质量与惯性质量等价的前提下，把质点在重力场的运动，同样看成是求四维曲率空间的短程线问题。因此，他成功地解释了天文学上水星近日点的每一百年移动43″ 的问题。

对于一个质点在势力场 $V(x, y, z)$ 中的运动的雅科毕方程文可写为

$$\delta \int \sqrt{2[h - V(x, y, z)]}\, ds = 0$$

弗马特原则可写成

$$\delta \int \mu(x, y, z) ds = 0$$

式中 $\mu(x, y, z)$是折射率。比较上列两式，可知若使
$$\mu(x, y, z) = \sqrt{2[h - V(x, y, z)]}$$
则一个质点的力学问题，可以当作一条光线的几何光学问题来求解；反之，几何光学的路线问题，也可以当作质点力学问题来求解。

第四篇　对于求解动力学方程有关的分析力学知识

第十章　变换理论

由于直接自第二编得到的一般动力学方程，往往甚难求解，因此利用变换的方法，使它变成一个较易求解的微分方程，是迫切需要研究的问题。在§4-11，我们曾讨论过接触变换，现在进一步作更广泛的研究，但仍限于讨论正则方程的变换。

§10-1　正则变换及其群性

设有一个以动力变数 q_1、q_2、…、q_N，p_1、p_2、…、p_N 来描述的力学系统，它的动力学方程为下列正则方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_r}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial p_r}\\ \frac{dp_r}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,N)$$

现在要将动力学变数变换成另一组新的动力学变数：Q_1、Q_2、…、Q_N，P_1、P_2、…、P_N，而原力学系统用这组新变数表示的动力学方程依旧保持下列正则方程的形式：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dQ_r}{dt}&=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial P_r}\\ \frac{dP_r}{dt}&=-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial Q_r}\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,N)$$

式中 $\widetilde{H}(Q,P,t)$ 系由 $H(q,p,t)$ 经变换而得，这样 $(q,p)\to(Q,P)$ 的变换

$$\left.\begin{aligned}Q_r&=\varphi_r(q_1,q_2,\cdots,q_N;p_1,p_2,\cdots,p_N;t)\\P_r&=\varphi_{N+r}(q_1,q_2,\cdots,q_N;p_1,p_2,\cdots,p_N;t)\end{aligned}\right\}\qquad(10\text{-}1)$$

称为正则变换(Canonical transformation)。

为了上述变换是可逆的，必须满足下列的雅科毕式：

$$\frac{\partial(Q_1,Q_2,\cdots,Q_N;P_1,P_2,\cdots,P_N)}{\partial(q_1,q_2,\cdots,q_N;p_1,p_2,\cdots,p_N)}=C\neq0\qquad(10\text{-}2)$$

不仅如此，为了保持度量制不变，我们限定 $C=1$。具有这样条件的正则变换，不但仍能实现正则变换的优点，而且在应用上更为方便。例如刘维定理成立，对于保守系统，变换后机械能数值不变(由于 $H_1=E_1$, $H_0=E_0$, 所以 $E_1=E_0$)，等等。

我们可以从正则方程得到哈密顿原理。反之，从哈密顿原理

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=0$$

也可以导出正则方程。换句话说，要说明自 $(q,p)\to(Q,P)$ 是正则变换，只要证明

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}(\Sigma p_r\dot{q}_r-H)\,dt=0\qquad(10\text{-}3)$$

和

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(Q,\dot{Q},\ t)\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}(\Sigma P_r\dot{Q}_r-\widetilde{H})\,dt=0\qquad(10\text{-}4)$$

两者同时成立。亦即对时间积分后，两者差一 q 和 Q 的任意函数 $W(q,Q,t)$ 的全微分

$$[\Sigma p_r\dot{q}_r-H(q,p,t)]-[\Sigma P_r\dot{Q}_r-\widetilde{H}(Q,P,\ t)]=\frac{d}{dt}W(q,Q,t)$$

(10-5)

式中 $W(q,Q,t)$ 为任意函数，称为母函数(Generating function)。因为上式对时间 t 积分后成为

$$\int_{t_0}^{t_1} dW = W(q_1, Q_1, t_1) - W(q_0, Q_0, t_0)$$

由于上式的右端是固定数，所以

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} dW = 0$$

因此式(10-3)和(10-4)同时成立。由此式(10-5)可改写为

$$\Sigma p_r \dot{q}_r - H - \Sigma P_r \dot{Q}_r + \widetilde{H} = \frac{\partial W}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial W}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial W}{\partial t}$$

比较等号前后各项的系数，可得：

$$p_r = +\frac{\partial W}{\partial q_r}$$

$$P_r = -\frac{\partial W}{\partial Q_r}$$

$$\widetilde{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (r = 1, 2, \cdots, N) \tag{10-6}$$

由上面的第一式可解得 Q，由第二式可解得 P，而从最后一式求出新哈密顿函数 $\widetilde{H}$。

设正则变换 T_1 将 $(q, p) \to (Q, P)$，正则变换 T_2 将 $(Q, P) \to (Q', P')$。则 $(q, p) \to (Q', P')$ 的变换记为 T_1T_2，称为正则变换的合成。显然 T_1T_2 是使 $(q, p) \to (Q', P')$ 的正则变换。又由于式(10-2)成立，所以任意一个正则变换的逆变换也存在。另一方面 $q_r \to q_r$，$p_r \to p_r$ 就是全同变换，当然它仍是正则变换。有了以上三种群(Group)的基本特性，我们知道所有正则变换成为一"群"。

§10-2　四种不同母函数的正则变换

选 W 为 q、Q、t 的函数并不是必须的。现在 q、p、Q、P、t 共 $(4N+1)$ 个变数，它们被 $2N$ 个变换联系着，所以其中只有 $(2N+1)$ 个变数是独立的，因此母函数可取下列四种不同的形式：

$$W_1(q, Q, t),\ W_2(q, P, t),\ W_3(p, Q, t),\ W_4(p, P, t)$$

其中$W_1(q, Q, t)$已于上节讨论过，现在只讨论后面的三种。

1. $W_2(q, P, t)$为母函数

令 $$W_2(q, P, t)=W_1(q, Q, t)+\Sigma P_r Q_r \tag{10-7}$$

以此 W_1 代入式(10-5)的 W，得

$$\Sigma p_r \dot{q}_r - H = \Sigma P_r \dot{Q}_r - \widetilde{H} + \frac{d}{dt}[W_2 - \Sigma P_r Q_r] =$$

$$= -\Sigma Q_r \dot{P}_r - \widetilde{H} + \frac{\partial W_2}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_r}\dot{q}_r + \frac{\partial W_2}{\partial P_r}\dot{P}_r\right)$$

比较上式的系数，得：

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial W_2}{\partial q_r} \\ Q_r &= \frac{\partial W_2}{\partial P_r} \\ \widetilde{H} &= H + \frac{\partial W_2}{\partial t} \end{aligned}\right\}(r=1, 2, \cdots, N) \tag{10-8}$$

由上面第一式可求得 P，再由第二式求得 Q。

2. $W_3(p, Q, t)$为母函数

令 $$W_3(p, Q, t)=W_1-\Sigma p_r q_r \tag{10-9}$$

以此 W_1 代入式(10-5)的 W，得

$$\Sigma p_r \dot{q}_r - H = \Sigma P_r \dot{Q}_r - \widetilde{H} + \frac{d}{dt}[W_3(p, Q, t) + \Sigma p_r q_r]$$

或

$$-\Sigma q_r \dot{p}_r - H = \Sigma P_r \dot{Q}_r - \widetilde{H} + \left[\frac{\partial W_3}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial W_3}{\partial p_r}\dot{p}_r + \frac{\partial W_3}{\partial Q_r}\dot{Q}_r\right)\right]$$

比较系数，得：

$$\left.\begin{aligned} q_r &= -\frac{\partial W_3}{\partial p_r}, \\ P_r &= -\frac{\partial W_3}{\partial Q_r}, \\ \widetilde{H} &= H + \frac{\partial W_3}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{10-10}$$

由上面第一式可求得 Q,再由第二式求得 P。

3. $W_4(p, P, t)$为母函数

令 $$W_4(p, P, t)=W_1(q, Q, t)+\Sigma P_r Q_r-\Sigma p_r q_r \tag{10-11}$$

以 w_1 代入式(10-5)的 w,得

$$\Sigma p_r \dot{q}_r - H = \Sigma P_r \dot{Q}_r - \widetilde{H} + \frac{d}{dt}[W_4 - \Sigma P_r Q_r + \Sigma p_r q_r]$$

即

$$-\Sigma q_r \dot{p}_r - H = -\Sigma Q_r \dot{P}_r - \widetilde{H} + \left[\frac{\partial W_4}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial W_4}{\partial p_r}\dot{p}_r + \Sigma \frac{\partial W_4}{\partial P_r}\dot{P}_r\right] \tag{10-12}$$

比较系数,得

$$\left.\begin{aligned} q_r &= -\frac{\partial W_4}{\partial p_r} \\ Q_r &= \frac{\partial W_4}{\partial P_r} \\ \widetilde{H} &= H + \frac{\partial W_4}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{10-13}$$

习题 3. 求证 $W_2=\Sigma q_r P_r$ 是全同变换的母函数。

注意: q_r 和 p_r 有关系式 $p_r=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$, 所以 q_r 和 p_r 必须同时变换成另一对 Q_r和 P_r。在以上一切变换中,$p_r\dot{q}_r$ 结合在一起,这就说明动力学上要求的变换式,应该保持这种重要的力学特性。所以动力学所要求的变换可以在N维的 q 空间施行。而 $2N$ 维相空间的正则变换不同于 $2N$ 维空间的一般变换。前者 $2N$ 个变数可以分成二组,每组变数各为 N,而以正则方程联系着。施行正则变换时,并不是每一对共轭动力学变数都要变换,我们可以只变换其一部分,而其它保持不变,例如我们可以只变其一对[参 16]。

有许多力学问题的 L、因之 H,并不包含时间 t,在这种情况

下，选取的W亦无需含有 t，于是$\frac{\partial W}{\partial t}=0$，因而$H=\tilde{H}$，式(10-12)变成

$$\Sigma(q_r dp_r - Q_r dP_r) = dW$$

上式就是第二编中(4-127)所定义的接触变换。

§10-3 正则变换群的子群——马蒂厄(Mathieu)变换和点变换

对于正则变换

$$\Sigma P_r dQ_r - \Sigma p_r dq_r = dW$$

若$W=0$，显然也是一特殊的正则变换，此时

$$\Sigma P_r dQ_r = \Sigma p_r dq_r \tag{10-14}$$

这种变换首先由马蒂厄于 1874 年所研究。这种$W=0$ 的正则变换也成一群，显然它是一般正则变换的子群。

若Q单独由 q 决定、P由 p 决定，那么这种变换称为增广点变换(Extended point transformation)，增广变换的变换式为：

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= Q_r(q) \\ P_r &= P_r(p) \end{aligned}\right\} \tag{10-15}$$

如果 $Q_r(q)$和 $P_r(p)$是线性函数，那么这种变换称为增广线性点变换(Extended linear point transformation)，它的变换式为：

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= A_{r1}q_1 + A_{r2}q_2 + \cdots + A_{rN}q_N = \sum_{s=1}^{N} A_{rs}q_s \\ P_r &= a_{r1}p_1 + a_{r2}p_2 + \cdots + a_{rN}p_N = \sum_{s=1}^{N} a_{rs}p_s \end{aligned}\right\} \tag{10-16}$$

式中 A_{rs}、a_{rs} 都是常数。将上式代入式(10-14)，得

$$\Sigma p_r dq_r - \sum_r \sum_s a_{rs}p_s \sum_t A_{rt} dq_t = 0$$

将上式的三重和式分成 $t=s$ 和 $t\neq s$ 两部分，则可改写为

$$\Sigma P_r dq_r - \sum_s p_s dq_s \sum_r a_{rs} A_{rs} - \sum_s \sum_t p_s dq_t \sum_r a_{rs} A_{rt} = 0 \tag{10-17}$$

若

$$\sum_r a_{rs} A_{rs} = 1 \quad 和 \quad \sum_r a_{rs} A_{rt} = 0 \qquad (s\neq t) \tag{10-18}$$

则式(10-17)化成恒等式

$$\sum_r p_r dq_r - \sum_s p_s dq_s = 0$$

因此式(10-16)是正则变换。

将系数 a_{rs} 排成行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}$$

并令 a'_{rs} 为 a_{rs} 的代数余子式，那么

$$A_{rs} = \frac{1}{\Delta} a'_{rs} \tag{10-19}$$

显然由此规定的 a_{rs}、A_{rs} 符合式(10-18)的两个条件。

若 $A_{rs}=a_{rs}$，那么条件式(10-18)成为：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{r=1}^{N} A_{rs}^2 = 1, \\ \sum_{r=1}^{N} A_{rs} A_{rt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (s\neq t) \tag{10-20}$$

上面两式可视为N维空间的坐标轴方向的正交条件，因此，这时的变换式(10-16)称为正交变换(Orthogonal transformation)。

我们在应用拉格朗日方程时，只需变换式

$$Q_r = f_r(q_1, q_2, \cdots, q_N; t) \qquad (r=1, 2, \cdots, N) \tag{10-21}$$

这种变换称为点变换(Point transformation)，显然这种变换也成一群，也是正则变换的子群。
它的母函数是

$$W_2 = \Sigma P_r f_r$$

由式(10-8)，变换式是

$$p_r = P_r \frac{\partial f_r}{\partial q_r}, \quad Q_r = f_r$$

§10-4 无限小正则变换

新动力学变数(Q_r, P_r)与原旧动力学变数(q_r, p_r)之差为无限小的正则变换，可写为:

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= q_r + \delta q_r \\ P_r &= p_r + \delta p_r \end{aligned}\right\}(r=1, 2, \cdots, N) \tag{10-22}$$

这无限小正则变换与全同变换 $Q_r \to q_r$、$P_r \to p_r$ 之差为无限小，而全同变换的母函数为 $W_2 = \Sigma q_r P_r$，所以无限小正则变换的母函数可写为

$$W_2 = \Sigma q_r P_r + \epsilon G(q, P, t) \tag{10-23}$$

式中 ϵ 是无限小的参数。由上式有:

$$p_r = \frac{\partial W_2}{\partial q_r} = P_r + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_r}$$

$$Q_r = \frac{\partial W_2}{\partial P_r} = q_r + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_r}$$

或:

$$\left.\begin{aligned} \delta p_r &= P_r - p_r = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_r} \\ \delta q_r &= Q_r - q_r = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_r} \end{aligned}\right\} \tag{10-24}$$

因 P_r 和 p_r 之差是无限小，$G(q,P,t)$ 中的 P 可以近似地以 p 代替，而将 G 看成是 (q,p,t) 的函数，这样式(10-24)可以改写为：

$$\left.\begin{aligned}\delta p_r &= -\epsilon\frac{\partial G}{\partial q_r}\\ \delta q_r &= \epsilon\frac{\partial G}{\partial p_r}\end{aligned}\right\} \tag{10-25}$$

由于上式成立，我们将 G 代替 W_2，称它为母函数。

在特别情况下，我们可用 q、p 的哈密顿函数 $H(q,p,t)$ 作为母函数 $G(q,p,t)$，dt 作为 ϵ，由式(10-25)得：

$$\delta p_r = -dt\frac{\partial H}{\partial q_r} = \dot{p}_r dt = dp_r$$

$$\delta q_r = dt\ \frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{q}_r dt = dq_r$$

上式的意义是：力学系统在 t 时的 q_r、p_r，经过 dt 时间后，所变成的新动力学变数 Q_r、P_r，就是用 $H(q,p,t)$ 作为母函数，dt 作为 ϵ 的无限小正则变换得来的动力学变数，自 t_0 至 t 有限时间内的运动，可以看成是由许多相继①的无限小时间 dt 的正则变换表达出来。这许多持续的无限小正则变换，合成一个单独的有限时间 $t-t_0$ 的正则变换。所以动力学系统自 t_0 的动力学变数 (q_0,p_0) 经运动后，变化到 t 时的变数 (q,p)，可用时间的连续函数的正则变换表示出来。哈密顿函数 $H(q,p,t)$ 就是变换的母函数。

§10-5 正则变换在摄动理论上的应用

行星在太阳的引力下，只受到一个有心力的作用，这是一个简单的力学问题。我们已在第一章中的哈密顿—雅科毕方程这一节里说明过它的解题方法。在这种简单情况下，设哈密顿函数为 H_0，这样，对应的动力学方程为：

---

① 在此"相继"二字，隐含有时间顺序的意义。

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_r&=\frac{\partial H_0}{\partial p_r}\\ \dot{p}_r&=-\frac{\partial H_0}{\partial q_r}\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,N) \tag{10-26}$$

这方程的解案可由适合下列偏微分方程

$$\frac{\partial s}{\partial t}+H_0\left(q,\frac{\partial s}{\partial q},t\right)=0 \tag{10-27}$$

的 $s(q,\alpha,t)$ 中求得。式中 α 为积分常数，求得了上式的 s 之后，可由下面两式计算式(10-26)的解：

$$\left.\begin{aligned}\beta_r&=\frac{\partial s}{\partial \alpha_r},\\ p_r&=\frac{\partial s}{\partial q_r}\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,N) \tag{10-28}$$

从上面第一式能求出 q_r，第二式可得出 p_r，这样式(10-26)的解可写为：

$$\left.\begin{aligned}q_r&=q_r(t,\alpha,\beta),\\ p_r&=p_r(t,\alpha,\beta)\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,N) \tag{10-29}$$

式中 α、β 是共轨正则常数。

若要考虑其它行星对这行星的引力，则这问题的哈密顿函数 H 就要比 H_0 复杂得多，然而由于行星间的引力比太阳的引力小得多，所以两者之差仍为极微小的量[参 12(b)]。因此，两者哈密顿函数的关系可写为

$$H=H_0-H_1 \tag{10-30}$$

考虑有其它行星引力的哈密顿方程为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_r&=\frac{\partial H}{\partial p_r}\\ \dot{p}_r&=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,N) \tag{10-31}$$

式(10-31)和(10-26)的解案也应该相差很小。

式(10-31)的解案可以用式(10-29)来表示，但需将式(10-29)中的α、β看作变数，并再进一步令$Q_r=\alpha_r$，$P_r=-\beta_r$，当作正则变换的新动力学变数，这样便有

$$\Sigma p_r\delta q_r-\Sigma P_r\delta Q_r=\sum_r(p_r\delta q_r+\beta_r\delta\alpha_r)=$$

$$=\sum_r\left(\frac{\partial s}{\partial q_r}\delta q_r+\frac{\partial s}{\partial \alpha_r}\delta\alpha_r\right)=\delta s$$

由于P、Q满足上式，所以$(q,p)\rightarrow(Q,P)$是个正则变换。因此Q、P的方程仍为正则方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{Q}_r&=\frac{\partial H'}{\partial P_r}\\ \dot{P}_r&=-\frac{\partial H'}{\partial Q_r}\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,N)\tag{10-32}$$

式中：

$$H'=H+\frac{\partial s}{\partial t},[\text{应用式}(10\text{-}27)]$$

$$=H-H_0=-H_1[\text{应用式}(10\text{-}30)]$$

令$H_1=R$表示摄动函数，因此式(10-32)可以改写为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\alpha}_r&=\frac{\partial R}{\partial \beta_r}\\ \dot{\beta}_r&=-\frac{\partial R}{\partial \alpha_r}\end{aligned}\right\}(r=1,2,\cdots,N)\tag{10-33}$$

上式是摄动理论(Perturbation theory)的基本方程。

如果R在初步考虑时不够精确，那么把R当作H_0，重复上述方法，不断地加以修正。因为新得到的式(10-33)也是一个正则方程，显然这个方法并不仅限于应用于行星的运动。如气象卫星在高空有大气阻力和地球的非中心力场引力下的运动，也可应用这个方法求解。许多工程问题同样也可应用这个方法。

第十一章　正则变换的不变式

在上章的讨论里，我们知道正则方程经过正则变换后，仍保持正则方程的形式。但是经正则变换后，保持形式不变的尚有其它力学函数。这种不变式在力学上有与能量积分、动量积分相同的功用。因此，寻找这些不变式，可以增强我们的解题能力。

§11-1　庞伽雷(Poincaré)积分不变式

现在先讨论积分不变式的必要和充分条件[参 17]。

设有一个力学系统，它的运动微分方程为

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \cdots, x_m, t) \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{11-1}$$

把 x_1、x_2、…、x_m 看作 m 维空间的一个矢量 $\boldsymbol{x}$ 的各分量，再添上时间 t，便得到 $m+1$ 维空间 $(\boldsymbol{x}, t)$，称它为增广坐标空间。$t=t_0$ 时在增广坐标空间中所得到的子空间称为超平面。显然超平面是 m 维坐标空间，在这超平面中作一条曲线 γ_0，那么所有 γ_0 上的点都有 $t=t_0$，γ_0 上的每一点 $\boldsymbol{x}_i$ 都有一条而且只有一条式(11-1)的积分曲线通过，为此要求曲线 γ_0 不与积分曲线相切。但这是必然的，因为 γ_0 上的点 $dt_0=0$，而积分曲线 $dt\neq 0$。在 γ_0 上的点 $\boldsymbol{x}_i$ 可用一个参数 u 自某点 P_0 开始至 P_0' 记为 $u=0$ 和 $u=1$。如果 γ_0 是闭线，那么终点与始点重合，即有 $x_i(0, t_0)=x_i(1, t_0)$。而 γ_0 上其它各点可写为 $x_i=x_i(u, t_0)$。

设在这 $m+1$ 维空间存在着一个矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$，现在要研究等时曲线 γ 上的线积分

$$I=\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x}=\int_\gamma \sum_{i=1}^{m} F_i dx_i \tag{11-2}$$

dx_i 是在 γ 上的，因此 $dt=0$，所以 $dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial u}du$。

又

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x,\ t) \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{11-3}$$

于是

$$\frac{dF_i}{dt}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t}+\frac{\partial F_i}{\partial t}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}X_k+\frac{\partial F_i}{\partial t}$$

和

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u}$$

所以式(11-2)积分对 t 的导数为

$$\frac{dI}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{\gamma}\sum_{i=1}^{m}F_i dx_i=\frac{d}{dt}\int_0^1\sum_{i=1}^{m}F_i\frac{\partial x_i}{\partial u}du$$

上式积分的上下限是个固定数，因此对这积分求时间的导数只要对被积函数取导数。而上式被积函数的导数为

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m}F_i\frac{\partial x_i}{\partial u}=\sum_{i=1}^{m}\frac{d}{dt}\left(F_i\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{dF_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial u}+F_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}X_k+\frac{\partial F_i}{\partial t}\right)\frac{\partial x_i}{\partial u}+F_i\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right]$$

改换上式末项的足标，使

$$\sum_{i=1}^{m}F_i\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u}=\sum_{k=1}^{m}F_k\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}F_k\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\ \frac{\partial x_i}{\partial u}$$

于是

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{m}F_i\frac{\partial x_i}{\partial u}=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}X_k+F_k\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial t}\right]\frac{\partial x_i}{\partial u}$$

所以

$$\frac{dI}{dt}=\int_0^1\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}X_k+F_k\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial t}\right]\frac{\partial x_i}{\partial u}du=$$

$$=\int_\gamma\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}X_k+F_k\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial t}\right]dx_i \tag{11-4}$$

要上式对超平面中任何曲线 γ 的积分为零，而各 dx 又是相互独立的，那么 dx_i 的系数必须为零，即

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}X_k+F_k\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial t}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{11-5}$$

由于上式使 I 是时间的不变量，而对积分的路径曲线是否封闭不提要求。因此称 I 是绝对积分不变量。式(11-5)是 I 为绝对积分不变量的充分和必须条件。

如果积分 I 只对 γ 为封闭曲线时才成立，那么我们称 I 为相对积分不变量。

现在证明：微分方程式(11-1)的一个任何积分

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_m;t)=\alpha\ (\text{常数}) \tag{11-6}$$

所产生的矢量场

$$F_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{11-7}$$

能使

$$I=\int_\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i \tag{11-8}$$

成为绝对积分不变式。

为此我们只要将式(11-7)的 F_i 代入式(11-5)，证明它等于零即可。

$$\sum_{k=1}^{m}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\right]X_k+\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\ \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right\}+\frac{\partial}{\partial t}\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}X_k+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\ \frac{dx_k}{dt}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}=0$$

因 α 是常数(证毕)。

现在将式(11-4)改写为

$$\frac{dI}{dt}=\int_{\gamma}\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(F_kX_k)+\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)X_k\right]+\frac{\partial F_i}{\partial t}\right\}dx_i \tag{11-9}$$

上式积分时时间是保持不变的，因此

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(F_kX_k)\,dx_i=d(F_kX_k)$$

于是式(11-9)成为

$$\frac{dI}{dt}=\sum_{k=1}^{m}[F_kX_k]_{u=0}^{1}+\int_{\gamma}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)X_k+\frac{\partial F_i}{\partial t}\right]dx_i$$

现在将上式应用于曲线 γ 是闭路曲线的情况，此时 x 的始点 $P(u=0)$ 与终点 $P'(u=1)$ 重合。因此

$$\sum_{k=1}^{m}[F_kX_k]_{u=0}^{1}=0$$

所以

$$\frac{dI}{dt}=\oint_{\gamma}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)X_k+\frac{\partial F_i}{\partial t}\right]dx_i \tag{11-10}$$

由上式，如果存在一个函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_i}\right)X_k+\frac{\partial F_i}{\partial t} \qquad (i=1, 2, \cdots, m)$$

则

$$\frac{dI}{dt}=\oint_\gamma \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=\oint_\gamma df=f_1-f_0=0$$

因上式只对闭曲线 γ 才成立，因而此时式(11-2)

$$I=\oint\sum_{i=1}^{m}F_i dx_i$$

是相对积分不变式，此时 γ_0 上的积分曲线形成流管如图 11-1 所示。

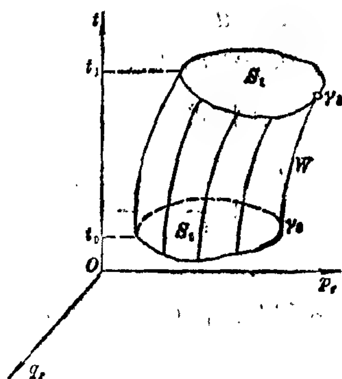


图 11-1

我们可以证明：每一个一阶相对积分不变式

$$I=\oint_\gamma\sum_{i=1}^{m}F_i dx_i \qquad (11\text{-}11)$$

相当于一个二阶绝对积分不变式

$$I=\iint\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}-\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)dx_i dx_j \qquad (11\text{-}12)$$

因为应用斯托克斯(Stokes)定理：线积分式(11-11)可以化成面积分式(11-12)

$$\oint_\gamma\sum_{i=1}^{m}F_i dx_i=\iint\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}-\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)dx_i dx_j \qquad (11\text{-}13)$$

如图所示，线积分是沿闭线 γ 积分的，但是面积分并不封闭，所以是二阶绝对积分不变式。以同样论证可知，一个 r 阶相对积分不

变式相当于 $r+1$ 阶绝对积分不变式；凡是阶数最高的积分不变式，一定是绝对不变式。

现在讨论m阶多重积分不变式的理论。设

$$I=\int\cdots\int M(x,\ t)\,dx_1dx_2\cdots dx_m \tag{11-14}$$

上式按照 $t=t_0$ 的初始条件的超平面中区域的一集点出发，按照运动方程式(11-1)在 $m+1$ 维空间中变化。现在要求对于M的条件，使 I 是个积分不变式。

因式(11-1)有m个独立的积分，设为

$$\phi_i(x_1,x_2,\cdots x_m,t)=\alpha_i \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{11-15}$$

上式可以看成为 x 和 α 的坐标变换式，其中 α 是沿积分曲线的常数。于是我们可将 I 积分用雅科毕积分表示如下：

$$I=\int\cdots\int M\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}d\alpha_1d\alpha_2\cdots d\alpha_n$$

上式α的积分极限不是时间 t 的函数，积分的区域是任意设定的。因此有积分不变式的必须条件

$$\frac{d}{dt}\left[M\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)}\right]=0 \tag{11-16}$$

雅科毕式行列式的 a_{ij} 元素是 $\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_j}$，它对 t 的导数是

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_j}\right)=\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\alpha_j}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\ \frac{\partial x_k}{\partial\alpha_j} \tag{11-17}$$

令

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}{\partial(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial\alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial\alpha_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial\alpha_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial\alpha_m} & \frac{\partial x_2}{\partial\alpha_m} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial\alpha_m}\end{vmatrix}$$

则由式(11-16)有

$$J\frac{dM}{dt}+M\frac{dJ}{dt}=0 \tag{11-18}$$

而

$$\frac{dJ}{dt}=\begin{vmatrix}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right) & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\right) & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m}\right) & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_m} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right) & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_m}\right) & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m}\end{vmatrix}+$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1}\right)\\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_2}\right)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_m} & \cdots & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m}\right)\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\sum_k \frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1}\\ \sum_k \frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum_k \frac{\partial X_1}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_m} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m}\end{vmatrix}+$$

$$
+\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \sum_k \frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2} & \sum_k \frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_m} & \sum_k \frac{\partial X_2}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_m} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial \alpha_m}
\end{vmatrix}+\cdots
$$

上面第一个行列式按指标 k，可分成 m 个行列式，当 $x_k=x_1$ 时，行列式等于 $\frac{\partial X_1}{\partial x_1}J$；当 $x_k=x_2$ 时，第一列和第二列全同，因此行列式之值为零，其余 $m-2$ 个行列也都为零，这样上面第一个行列式之值为 $\frac{\partial X_1}{\partial x_1}J$。同样第二个行列式之值为 $\frac{\partial X_2}{\partial x_2}J$，……，第 m 个行列式之值为 $\frac{\partial X_m}{\partial x_m}J$。所以

$$
\frac{dJ}{dt}=\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial X_m}{\partial x_m}\right)J
$$

将上式代入式(11-18)，得

$$
J\frac{dM}{dt}+M\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\right)J=0
$$

因 $J\neq 0$，故得

$$
\frac{dM}{dt}+M\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}=0 \qquad (11\text{-}19a)
$$

或

$$
\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(MX_i)+\frac{\partial M}{\partial t}=0 \qquad (11\text{-}19b)
$$

我们知道，式(11-14)中的函数 $M(x_1, x_2, \cdots, x_m; t)$ 被称作为雅

科毕乘式(Jacobi multipliers)，由上式可知要 I 成为绝对积分不变式，那么乘式M必须适合线性偏微分方程式(11-19)。

现在开始讨论哈密顿式力学系统的积分不变式。因式(10-5)按本节需要可以写成

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i1} dq_{i1} - \sum_{i=1}^{N} p_{i0} dq_{i0} - H_1 dt_1 + H_0 dt_0 = dW(q_1, q_0; t_1, t_0) \cdots \tag{11-20}$$

上式足标"0"表示 $t=t_0$ 时之值，"1"表示 $t=t_1$ 时之值，dq_{i0} 和 dq_{i1} 分别表示沿曲线 γ_0 和 γ_1 的 q_{i0} 和 q_{i1} 的微分增量。因在 γ_0 和 γ_1 曲线上 t_0 和 t_1 保持不变，所以 dt_0 和 dt_1 都等于0。于是式(11-20)沿 γ_0 和 γ_1 为闭路曲线时的积分式为

$$\oint_{\gamma_1} \sum_{i=1}^{N} p_{i1} dq_{i1} - \oint_{\gamma_0} \sum_{i=1}^{N} p_{i0} dq_{i0} = \int dW(q_1, q_0; t_1, t_0) = 0$$

(因为闭曲线的端点重合)

上式可写成

$$\oint_{\gamma_1} \sum_{i=1}^{N} p_{i1} dq_{i1} = \oint_{\gamma_0} \sum_{i=1}^{N} p_{i0} dq_{i0} \tag{11-21}$$

上式称为庞伽雷积分不变式。

如果 γ_0 和 γ_1 曲线不再保持时间不变的特性，但仍都是闭路曲线($m+1$ 维空间中)，那么式(11-20)的积分成为

$$\oint_{\gamma_0} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i dq_i - H\,dt \right) = \oint_{\gamma_1} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i dq_i - H\,dt \right) \tag{11-22}$$

也就是说，积分

$$I = \oint_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i dq_i - H\,dt \right) \tag{11-23}$$

是一阶相对积分不变式。要注意，所有各 γ 曲线必须在同一流管

上(m维), 但是同一γ曲线上的时间不再是单值的了。

现在研究哈密顿式力学系统的相积分

$$I=\int\cdots\int dq_1dq_2\cdots dq_Ndp_1dp_2\cdots dp_N \tag{11-24}$$

将上式与式(11-14)比较, 可知$m=2N$, $M=1$, x的分量式(q_1, q_2, $\cdots$, q_N; p_1, p_2, $\cdots$, p_N), 而式(11-1)成为:

$$X_i=\frac{dx_i}{dt}=\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\cdots;N)$$

$$X_i=\frac{dx_i}{dt}=\dot{p}_{i-N}=-\frac{\partial H}{\partial q_{i-N}} \qquad (i=N+1,N+2,\cdots 2N)$$

将上两式代入式(11-19b), 由于$M=1$, $\frac{\partial M}{\partial t}=0$, 所以式(11-19$b$)成为

$$\sum_{i=1}^{2N}\frac{\partial}{\partial x_i}X_i=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)+\sum_{i=N+1}^{2N}\frac{\partial}{\partial p_{i-N}}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_{i-N}}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\partial p_i}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_i}\right)=0$$

即积分式(11-24)是$2N$阶绝对积分不变式。所以相空间中有限容积中的一集点经运动后, 这些点所占的体积不变, 这是刘维定理的又一证明。

对于庞伽雷积分, 应用斯托克斯定理, 把回路积分的相等换成面积分的相等, 可以得到

$$\iint_{s_0}\sum_{r=1}^{N}dp_{r0}dq_{r0}=\iint_{s_1}\sum_{r=1}^{N}dp_{r1}dq_{r1} \tag{11-25}$$

§11-2 拉格朗日括号是正则不变式

式(11-25)可以看作是正则变换$(q,p)\to(Q,P)$的结果, 因而可以写成

$$\iint_S \sum_r dp_r dq_r = \iint_S \sum_r dP_r dQ_r \qquad (11\text{-}26)$$

面积S表示在相空间$(q_1, q_2, \cdots, q_N; p_1, p_2, \cdots, p_N)$的二维面。这二维面的点可用两个参数$u$、$v$来确定，即：

$$q_r = q_r(u, v), \qquad p_r = p_r(u, v)$$

于是

$$dq_r dp_r = \frac{\partial(q_r, p_r)}{\partial(u, v)} du dv$$

式中

$$\frac{\partial(q_r, p_r)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial q_r}{\partial u}, & \dfrac{\partial p_r}{\partial u} \\ \dfrac{\partial q_r}{\partial v}, & \dfrac{\partial p_r}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial q_r \partial p_r}{\partial u \partial v} - \frac{\partial p_r \partial q_r}{\partial u \partial v} \right)$$

同样对于式(11-26)的右边有

$$dQ_r dP_r = \frac{\partial(Q_r, P_r)}{\partial(u, v)} du dv$$

于是式(11-26)变换成在(u, v)平面同一区域R的积分

$$\iint_R \sum_r \frac{\partial(q_r, p_r)}{\partial(u, v)} du dv = \iint_R \sum_r \frac{\partial(Q_r, P_r)}{\partial(u, v)} du dv$$

$dudv$对同一任意积分面积的面积分相等，这样必须被积函数也相等，因此有

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{\partial(q_r, p_r)}{\partial(u, v)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial(Q_r, P_r)}{\partial(u, v)}$$

或

$$\sum_{r=1}^{N} \left(\frac{\partial q_r \partial p_r}{\partial u \partial v} - \frac{\partial p_r \partial q_r}{\partial u \partial v} \right) = \sum_{r=1}^{N} \left(\frac{\partial Q_r \partial P_r}{\partial u \partial v} - \frac{\partial P_r \partial Q_r}{\partial u \partial v} \right) \qquad (11\text{-}27a)$$

将

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial q_r}{\partial u}\frac{\partial p_r}{\partial v}-\frac{\partial p_r}{\partial u}\frac{\partial q_r}{\partial v}\right)\text{写成括号}[u,v]_{(q,p)}$$

称为拉格朗日括号，那么式(11-27a)可以改写为

$$[u,v]_{(q,p)}=[u,v]_{(Q,P)} \tag{11-27b}$$

上式表示(q,p)变换成任何(Q,P)都不变，也就是拉格朗日括号是正则变换不变式，因此可以略去脚标(q,p)而简写为$[u,v]$。

拉格朗日括号有下列一些特性：

(1) $[u,v]=-[v,u]$

(2) $[q_i,p_j]=\delta_{ij}$

(3) $[q_i,q_j]=0,[p_i,p_j]=0$

证明：

(1) 直接由下式看出：

$$\Sigma\left(\frac{\partial q_r}{\partial u}\frac{\partial p_r}{\partial v}-\frac{\partial p_r}{\partial u}\frac{\partial q_r}{\partial v}\right)=-\Sigma\left(\frac{\partial q_r}{\partial v}\frac{\partial p_r}{\partial u}-\frac{\partial p_r}{\partial v}\frac{\partial q_r}{\partial u}\right)$$

(2) $$[q_i,\ p_j]=\Sigma\left(\frac{\partial q_r}{\partial q_i}\frac{\partial p_r}{\partial p_j}-\frac{\partial p_r}{\partial q_i}\frac{\partial q_r}{\partial p_j}\right)$$

因：

$$\frac{\partial q_r}{\partial q_i}=\delta_{ri},\quad \frac{\partial p_r}{\partial p_j}=\delta_{rj},\quad \frac{\partial p_r}{\partial q_i}=0,\quad \frac{\partial q_r}{\partial p_j}=0$$

式中δ_{ri}是克罗内克(Kronecker)符号，当$r=i,\delta_{ri}=1$；当$r\neq i$，$\delta_{ri}=0$。

于是

$$[q_i,\ p_j]=\sum_r\delta_{ri}\delta_{rj}=\delta_{ij}$$

(3) 应用p和q互不相关的特性：$\frac{\partial p}{\partial q}=0$，和$\frac{\partial q}{\partial p}=0$，即得。

拉格朗日括号在天体力学中计算行星摄动的方程时很有用处。

§ 11-3 泊松(Poisson)括号是正则变换的不变式

泊松括号: $(u,\ v)_{(q,p)}=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial q_r}\frac{\partial v}{\partial p_r}-\frac{\partial u}{\partial p_r}\frac{\partial v}{\partial q_r}\right)$ (11-28)

对于泊松括号,同样有

$$(u, v)_{(q,p)}=(u, v)_{(Q,P)} \tag{11-29}$$

即泊松括号也是正则变换不变式,脚标(q, p)也同样可以略去。

对于泊松括号,有下列关系式:

(1) $(u, v)=-(v, u)$

(2) $(C, v)=0, C=$常数

(3) $(Cu, v)=C(u, v)$

(4) $(w+u, v)=(w, v)+(u, v)$

(5) $\frac{\partial}{\partial t}(u, v)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)+\left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right)$

(6) $(u, vw)=(u, v)w+(u, w)v$

以上六个关系式很容易从定义(11-28)推得,所以证明从略。

现在证明下列三个较难推导的重要关系式:

(7) $\sum_{l=1}^{2N}[u_l, u_i](u_l, u_j)=\delta_{ij}$ (11-30)

证:

$$\sum_{l=1}^{2N}[u_l, u_i](u_l, u_j)=\sum_{l=1}^{2N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}-\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\right)\cdot$$

$$\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\partial u_l}{\partial q_m}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}-\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}-$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}-\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}.$$

但

$$\sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}=\frac{\partial q_k}{\partial q_m}=\delta_{km},\quad \sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial q_m}=\frac{\partial p_k}{\partial q_m}=0,$$

$$\sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial q_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}=\frac{\partial q_k}{\partial p_m}=0,\quad \sum_{l=1}^{2N}\frac{\partial p_k}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial p_m}=\frac{\partial p_k}{\partial p_m}=\delta_{km}$$

所以

$$\sum_{l=1}^{2N}[u_l,u_i](u_l,u_j)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial p_k}{\partial u_i}\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial u_j}{\partial p_m}\delta_{km}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial q_k}{\partial u_i}\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial u_j}{\partial q_m}\delta_{km}=\frac{\partial u_j}{\partial u_i}=\delta_{ij}$$

如果将$[u_l,u_i]$记为L_{li}，(u_l,u_j)记为P_{lj}，则关系式(7)可以表示为如下的矩阵式:

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \cdots & L_{1,2N}\\ L_{2,1} & L_{2,2} & \cdots & L_{2,2N}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ L_{2N,1} & L_{2N,2} & \cdots & L_{2N,2N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{2,1} & \cdots & P_{2N,1}\\ P_{1,2} & P_{2,2} & \cdots & P_{2N,2}\\ \vdots & \vdots & & \\ P_{1,2N} & P_{2,2N} & \cdots & P_{2N,2N}\end{pmatrix}=E$$

式中E是$2N$阶单位矩阵。

应用这个关系式，能已知L可求P，已知P可求L。下列关系式(8)就是利用式(11-30)求得的。

(8) 泊松括号与拉格朗日括号有下列类似的特性:

$$(p_i,p_j)=0,\quad (q_i,q_j)=0,\quad (q_i,p_j)=\delta_{ij}$$

证: 令$2N$个u_l是q_1、q_2、…、q_N，p_1、p_2、…、p_N。

1) 令$u_i=p_i$，$u_j=p_j$，则式(7)成为

$$\sum_{m=1}^{N}[q_m,p_i](q_m,p_j)+\sum_{k=1}^{N}[p_k,p_i](p_k,p_j)=$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\delta_{mi}(q_m,p_j)=(q_i,p_j)=\frac{\partial p_j}{\partial p_i}=\delta_{ij}\quad \text{（证明了第三式）}$$

2）令 $u_i=p_i, u_j=q_j$，则

$$\sum_{m=1}^{N}[q_m,p_i](q_m,\ q_j)+\sum_{k=1}^{N}[p_k,p_i](p_k,q_j)=$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\delta_{mi}(q_m,q_j)=(q_i,\ q_j)=\frac{\partial q_j}{\partial p_i}=0$$

3）令 $u_i=q_i, u_j=p_j$

$$\sum_{m=1}^{N}[q_m,q_i](q_m,\ p_j)+\sum_{k=1}^{N}[p_k,q_i](p_k,p_j)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\delta_{ki}(p_k,p_j)=(p_i,\ p_j)=\frac{\partial p_j}{\partial q_i}=0$$

(9) $(F,G)_{(q,p)}=(F,G)_{(Q,P)}$

式中 F、G 是 p、q 的函数，经正则变换后 F、G 成为 Q、P 的函数。

证：$$(F,G)_{(q,p)}=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j}-\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}+\frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial q_j}\right)\cdot\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_r}\frac{\partial Q_r}{\partial p_j}+\frac{\partial G}{\partial P_r}\frac{\partial P_r}{\partial p_j}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}+\frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial P_i}{\partial p_j}\right)\cdot\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_r}\frac{\partial Q_r}{\partial q_j}+\frac{\partial G}{\partial P_r}\frac{\partial P_r}{\partial q_j}\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial Q_i}\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial Q_r}(Q_i,Q_r)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial P_i}\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial Q_r}(P_i,Q_r)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial Q_i}\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial P_r}(Q_i,\ P_r)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial P_i}\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial P_r}(P_i,P_r)$$

应用关系式(8)，上式成为

$$(F,G)_{(q,p)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial P_i}\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial Q_r}(-\delta_{ir})+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial Q_i}\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial G}{\partial P_r}\delta_{ir}=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial G}{\partial P_i}-\frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial G}{\partial Q_i}\right)=(F,G)_{(Q,P)}$$

由此证明了泊松括号是正则变换的不变式，足标可以略去。

L 和 P 括号都是正则变换不变式，反之，将

$$(q_1, q_2\cdots, q_N; p_1, p_2, \cdots, p_N)$$

变换成新的动力学变数 $(Q_1, Q_2\cdots, Q_N; P_1, P_2, \cdots, P_N)$

如果适合：

$$(Q_r, Q_s)=0, \quad (P_r, P_s)=0, \quad (Q_r, P_s)=\delta_{rs}$$

或

$$[Q_r, Q_s]=0, \quad [P_r, P_s]=0, \quad [Q_r, P_s]=\delta_{rs}$$

那么变换 $(q, p)\to(Q, P)$ 一定是正则变换，证明从略。

第十二章　动力学方程的一次积分

§12-1　用泊松括号表示动力学方程和它的一次积分

$$(q_k,\ H)=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial q_k}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_r}-\frac{\partial q_k}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial q_r}\right)=\delta_{kr}\dot{q}_r-0(-\dot{p}_r)=\dot{q}_k$$

$$(p_k,\ H)=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_r}-\frac{\partial p_k}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial q_r}\right)=0(\dot{q}_r)-\delta_{kr}(-\dot{p}_r)=\dot{p}_k$$

所以动力学方程可用泊松括号表示为:

$$\left.\begin{aligned}(q_k, H)&=\dot{q}_k,\\(p_k, H)&=\dot{p}_k\end{aligned}\right\}\tag{12-1}$$

我们从理论力学中知道,应用能量积分和动量积分来解题,往往很为方便。另一方面,由于这些积分有明确的物理概念,因此在解题时更易于着手。这些积分形式上属于

$$f(t、q_r、p_r)=C\tag{12-2}$$

称为动力学方程的一次积分, 式中C为常数。现在用泊松括号来改写积分式(12-2)。将式(12-2)对时间全微分, 因其右端是常数C,所以

$$\frac{df}{dt}=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=$$

$$=\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=$$

$$=(f,\ H)+\frac{\partial f}{\partial t}$$

所以

$$\frac{df}{dt}=(f, H)+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{12-3}$$

就是用泊松括号来表示的 $f=C$ 是一次积分式的充分而必要的条件。

如果 $f=H$，那么因 $(H, H)=0$，所以式(12-3)成为

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

即如果 H 不显含 t，则 $\frac{dH}{dt}=0$，表示

$$H=\text{常量}$$

是一次积分，这个积分就是能量积分。

§12-2 泊松恒等式

现在证明下列泊松恒等式[参 14]：

$$[u, (v, w)]+[v, (w, u)]+[w, (u, v)]=0 \tag{12-4}$$

因为

$$(v, w)=\sum_k\left(\frac{\partial v}{\partial q_k}\frac{\partial w}{\partial p_k}-\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial w}{\partial q_k}\right)=\sum_k\left(\frac{\partial v}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}-\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)w$$

令

$$D_v\equiv\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial v}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}-\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\equiv\sum_{i=1}^{2N}\alpha_i\frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

将它看作微分运算符，则

$$(v, w)=D_{vw}=\sum_{i=1}^{2N}\alpha_i\frac{\partial w}{\partial \xi_i} \tag{12-5}$$

同样应用算符

$$D_u=\sum_{j=1}^{2N}\beta_j\frac{\partial}{\partial \eta_j}$$

则有

$$[u,(v,w)]+[v,(w,u)]=[u,(v,w)]-[v,(u,w)]=$$

$$=D_uD_vw-D_vD_uw=$$

$$=\sum_j\beta_j\frac{\partial}{\partial\eta_j}\sum_i\alpha_i\frac{\partial w}{\partial\xi_i}-\sum_i\alpha_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}\sum_j\beta_j\frac{\partial w}{\partial\eta_j}=$$

$$=\sum_j\beta_j\sum_i\frac{\partial\alpha_i}{\partial\eta_j}\frac{\partial w}{\partial\xi_i}+\sum_j\beta_j\sum_i\alpha_i\frac{\partial^2 w}{\partial\xi_i\partial\eta_j}-$$

$$-\sum_i\alpha_i\sum_j\frac{\partial\beta_j}{\partial\xi_i}\frac{\partial w}{\partial\eta_j}-\sum_i\alpha_i\sum_j\beta_j\frac{\partial^2 w}{\partial\xi_i\partial\eta_j}-$$

上式第二项和第四项对消，所以只留下 w 的一次导数项，即

$$[u,(v,w)]+[v,(w,u)]=\sum_j\beta_j\sum_i\frac{\partial\alpha_i}{\partial\eta_j}\frac{\partial w}{\partial\xi_i}-$$

$$-\sum_i\alpha_i\sum_j\frac{\partial\beta_j}{\partial\xi_i}\frac{\partial w}{\partial\eta_j}=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left(A_k\frac{\partial w}{\partial p_k}+B_k\frac{\partial w}{\partial q_k}\right)\tag{12-6}$$

式中 A_k、B_k 是 u、v 的函数，但不含 w。

令 $w=p_i$，则式(12-6)成为

$$[u,(v,p_i)]-[v,(u,p_i)]=A_i\tag{12-7}$$

但

$$(v,p_i)=\sum_k\left(\frac{\partial v}{\partial q_k}\frac{\partial p_i}{\partial p_k}-\frac{\partial v}{\partial p_k}\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial v}{\partial q_i}$$

同样，

$$(u,p_i)=\frac{\partial u}{\partial q_i}$$

所以式(12-7)成为

$$A_i=\left(u,\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)-\left(v,\frac{\partial u}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}(u,v)\tag{12-8}$$

同样在式(12-6)中，令 $w=q_i$，则可证明

$$B_i = -\frac{\partial}{\partial p_i}(u, v) \tag{12-9}$$

将 A_i、B_i 代入式(12-6)，得

$$[u, (v, w)] + [v, (w, u)] = \sum_k \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial q_k}\frac{\partial w}{\partial p_k} - \frac{\partial(u, v)}{\partial p_k}\frac{\partial w}{\partial q_k}\right] =$$

$$= [(u, v), w] = -[w, (u, v)]$$

于是式(12-4)得证。

§12-3 关于一次积分的泊松定理和内旋积分系

泊松定理：若 $u(q, p, t) = a$，$v(q, p, t) = b$，同时为某正则方程的两个一次积分，那么 $(u, v) = C$ 也是这正则方程的一次积分。

证：因 $u = a$ 和 $v = b$ 是一次积分，所以

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, H) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + (v, H) = 0$$

在式(12-4)中，我们令 $w = H$，则有

$$[u, (v, H)] + [v, (H, u)] + [H, (u, v)] = 0$$

上式可改写成

$$\left(u, -\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(v, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + (H, (u, v)) = 0$$

或

$$-\frac{\partial(u, v)}{\partial t} + (H, (u, v)) = 0$$

依照式(12-3)知道，$(u, v) = C$ 也是一个一次积分。

上述定理提供一种从已知两个一次积分求新的一次积分的一个方法。这似乎是一个令人鼓舞的结果。但是遗憾的是这个方法不是永远成功的。因为如果 $(u, v) \equiv 0$ 时，就不能得到新积分。

设 f_1、f_2、…、f_s 是动力学变数 q、p 的函数，它们是某一力学系统正则方程的一组一次积分。若

$$(f_i, f_k)=0 \qquad (i, k=1, 2, \cdots, s) \tag{12-10}$$

那么我们不能再从这组一次积分得到新的积分，我们称这样的一组积分为内旋积分系(Involution system)。例如不受力作用的自由质点，它的能量积分和三个动量积分成为内旋积分系。

例 12-1 已知一质点受在原点的有心力的作用下，对 x 轴和 y 轴的动量矩守恒，求证对 z 轴的动量矩也守恒。

证：令 x、y、z 表示为 q_1、q_2、q_3，动量 $m\dot{x}$、$m\dot{y}$、$m\dot{z}$ 表示为 p_1、p_2、p_3。则现将绕 x、y、z 轴的动量矩表示为 φ_1、φ_2、φ_3，则：

$$\varphi_1=q_2p_3-q_3p_2$$

$$\varphi_2=q_3p_1-q_1p_3$$

$$\varphi_3=q_1p_2-q_2p_1$$

我们设 $\varphi_1=a$、$\varphi_2=b$ 是两个已知的一次积分，则由泊松定理，因

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_r}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_r}\right)=\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(q_3, p_3)}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_3}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}=$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(q_2p_3-q_3p_2)\right]\left[\frac{\partial}{\partial p_3}(q_3p_1-q_1p_3)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial p_3}(q_2p_3-\right.$$

$$\left.-q_3p_2)\right]\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(q_3p_1-q_1p_3)\right]=$$

$$=(-p_2)(-q_1)-q_2p_1=q_1p_2-q_2p_1=\varphi_3$$

所以 $\varphi_3=C$ 是一次积分。

例 12-2 设某力学系统的哈密顿函数 H 不含 t，又 $\varphi(q, p, t)=C_1$ 是已知一次积分。求证 φ 的各阶偏导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$、$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$、…、都是一次积分。

证：因 H 不含 t，所以 $H=C_2$，即能量积分也是一次积分。于是 $(H, \varphi)=C_3$ 是一新积分。

但由 $\varphi=C_1$，应用式(12-3)得

$$(\varphi, H)+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \quad 即 \quad -C_3+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

所以 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=C_3$ 是一新积分。再应用这个结论，可知 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=C_4$ 也是新积分。如此继续下去，可知 $\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}=C_5$…都是新积分。

如果 $\varphi=C_1$ 不含有 t，则式(12-3)成为 $(\varphi, H)\equiv 0$，不存在新积分。

注意：N 个自由度的一次积分，最多只有 $2N$ 个是独立的。

§12-4 诺埃塞尔(Noether)定理

1918 年诺埃塞尔应用范围更广的无限小变换：

$$\bar{t}=t+\epsilon\xi(t;q_1,\cdots,q_N;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_N) \qquad \epsilon=\text{小参数}$$

$$\bar{q}_i(t)=q_i(t)+\epsilon\eta_i(t;q_1,\cdots,q_N,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_N)$$

使下列积分为一不变式：

$$I=\int_{t_a}^{t_b}L(t;q_1,q_2,\cdots,q_N;\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N)dt$$

即

$$I(\epsilon)=\int_{\bar{t}_a}^{\bar{t}_b}L[\bar{t},\bar{q}_1(\bar{t}),\cdots,\bar{q}_N(\bar{t});\dot{\bar{q}}_1(\bar{t}),\cdots,\dot{\bar{q}}_N(\bar{t})]d\bar{t}=I$$

那么有关欧拉—拉格朗日方程组存在着由下式表示的第一次积分(参 20)：

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\eta_i+\left(L-\sum_{i=1}^{N}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\xi=\text{常量}$$

证：为了简便起见，以 $N=1$ 加以证明如下：变换式可简写为：

$$\bar{t}=t+\epsilon\xi(t,q,\dot{q}),\quad \bar{q}(t)=q(t)+\epsilon\eta(t,q,\dot{q})$$

因 ϵ 很小，所以 $\bar{t}\approx t$。于是上列第一式可写为

$$\bar{t}-\epsilon\xi(\bar{t},q,\dot{q})=t$$

于是经变换后的第二式为

$$\bar{q}(\bar{t})=q[(\bar{t}-\epsilon\xi(\bar{t},q,\dot{q})]+\epsilon\eta(\bar{t},q,\dot{q})$$

上式中，q、$\dot{q}$ 已为 $\bar{t}$ 的函数。将上式按 ϵ 展开成幂级数，并略去高次项，得

$$\bar{q}(\bar{t})=q(\bar{t})-\epsilon\frac{\partial q}{\partial t}\xi(\bar{t},q,\dot{q})+\epsilon\eta(\bar{t},q,\dot{q}) \qquad (12\text{-}11)$$

令

$$\rho(\bar{t}, q, \dot{q}) \equiv \eta(\bar{t}, q, \dot{q}) - \frac{\partial q}{\partial t}\xi(\bar{t}, q, \dot{q}) \tag{12-12}$$

则式(12-11)可简写为

$$\bar{q}(\bar{t}) = q(\bar{t}) + \epsilon\rho(\bar{t}, q, \dot{q}) \tag{12-13}$$

于是积分

$$\bar{I}(\epsilon) = \int_{\bar{t}_a}^{\bar{t}_b} L[\bar{t}, q(\bar{t}) + \epsilon\rho(\bar{t}, q, \dot{q});\quad \dot{q}(\bar{t}) + \epsilon\dot{\rho}(\bar{t}, q, \dot{q})]d\bar{t}$$

按照:

$$\bar{t}_a = t_a + \epsilon\xi(t, q, \dot{q})\,|_{t=t_a} \equiv t_a + \delta_a$$

$$\bar{t}_b = t_b + \epsilon\xi(t, q, \dot{q})\,|_{t=t_b} \equiv t_b + \delta_b$$

那么积分上下限可按下列推演:

$$\int_{\bar{t}_a}^{\bar{t}_b} = \int_{t_a+\delta_a}^{t_b+\delta_b} = \int_{t_a+\delta_a}^{t_b} + \int_{t_b}^{t_b+\delta_b} =$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_a+\delta_a} + \int_{t_b}^{t_b+\delta_b}$$

于是

$$\bar{I}(\epsilon) = \int_{t_a}^{t_b}[L(\bar{t}, q(\bar{t}) + \epsilon\rho(\bar{t}, q, \dot{q}),\ \dot{q}(\bar{t}) + \epsilon\dot{\rho}(\bar{t}, q, \dot{q})]d\bar{t} +$$

$$+ \int_{t_b}^{t_b+\delta_b} L[\bar{t}, q(\bar{t}), \dot{q}(\bar{t})]d\bar{t} - \int_{t_a}^{t_a+\delta_a} L[\bar{t}, q(\bar{t}), \dot{q}(\bar{t})]d\bar{t} +$$

$$+ 0(\epsilon^2)$$

式中 $0(\epsilon^2)$ 是指集合 ϵ^2 和更高阶所有各项。

上式末两个积分的被积函数已弃去 ϵ 次项，因为积分区间 δ_a 和 δ_b 已经包含 ϵ 一次项，如果被积函数再取 ϵ 的一次项，那么末两个积分将成为 ϵ^2 项。将上式第一个积分按 ϵ 幂次展开，并略去高次项得

$$\bar{I}(\epsilon) = \int_{t_a}^{t_b} L[\bar{t}, q(\bar{t}), \dot{q}(\bar{t})]d\bar{t} +$$

$$+ \epsilon\int_{t_a}^{t_b} [\rho(\bar{t}, q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial q}L(\bar{t}, q, \dot{q}) +$$

$$+\dot{\rho}(\bar{t},q,\dot{q})\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(\bar{t},q,\dot{q})]d\bar{t}+\delta_b[L(\bar{t},q,\dot{q})]_{\bar{t}=t_b}-$$

$$-\delta_a[L(\bar{t},q,\dot{q})]_{\bar{t}=t_a}+0(\epsilon^2) \tag{12-14}$$

上式第二个积分的末一项应用部分积分得

$$\int_{t_a}^{t_b}[\rho\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(\bar{t},q,\dot{q})]d\bar{t}=[\rho\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(\bar{t},q,\dot{q})]_{t_a}^{t_b}-$$

$$-\int_{t_a}^{t_b}\left[\rho\frac{d}{d\bar{t}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]d\bar{t}$$

将上式中的 ρ 用式(12-12)改写后代入式(12-14)得

$$\bar{I}(\epsilon)=\int_{t_a}^{t_b}L(\bar{t},q,\dot{q})d\bar{t}+$$

$$+\epsilon\int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right][\eta(\bar{t},q,\dot{q})-\frac{dq}{dt}\xi(\bar{t},q,\dot{q})]d\bar{t}+$$

$$+\epsilon\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta(\bar{t},q,\dot{q})+\left[L(\bar{t},q,\dot{q})-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\xi(\bar{t},q,\dot{q})\right\}_{t_a}^{t_b}+$$

$$+0(\epsilon^2)$$

上式第一个积分就是 I(把 $\bar{t}$ 改写为 t),于是

$$\bar{I}(\epsilon)-I=\epsilon\int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right](\eta-\dot{q}\xi)dt+$$

$$+\epsilon\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta+\left(L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\xi\right]_{t_a}^{t_b}+0(\epsilon^2)$$

如果 q 适合欧拉—拉格朗日方程,则

$$\bar{I}(\epsilon)-I=\epsilon\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta+\left(L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\xi\right]_{t_a}^{t_b}+0(\epsilon^2)$$

因为 I 是个不变式,于是有 $\bar{I}(\epsilon)-I=0$。所以

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta+\left(L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\xi\right]_{t_a}=\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta+\left(L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\xi\right]_{t_b}$$

但 t_a、t_b 是任意的,于是得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\eta+\left(L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\xi=\text{常量}$$

对于具有N自由度的系统，易知有

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\eta_i+\left(L-\sum_{i=1}^{N}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\xi=\text{常量} \qquad (12\text{-}15)$$

上式只有q对t的一次导数，不包括二次导数，所以上式是与欧拉—拉格朗日方程相关的第一次积分。这个积分的内容包括很广：可以包括能量积分，动量积分，动量矩积分，等等。

例(1) 对于L不是时间的显函数时，

$$L(q_1, q_2, \cdots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N)\equiv T-V$$

应用变换式：

$$\bar{t}=t+\epsilon\xi, \quad \bar{q}_i=q_i+\epsilon\eta_i$$

可取$\xi=1, \eta_i=0(i=1, 2, \cdots, N)$。于是式(12-15)成为

$$L-\sum_{i=1}^{N}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\text{常量}$$

即为能量积分。

例(2) 具有n个质点的星系，L函数为

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-\sum_{i>j=1}^{n}\frac{\gamma m_i m_j}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|^2}$$

则变换：

$$\bar{t}=t+\epsilon\xi, \quad \bar{x}_i=x_i+\epsilon\eta_{ix}, \quad \bar{y}_i=y_i+\epsilon\eta_{iy},$$

$$\bar{z}_i=z_i+\epsilon\eta_{iz}$$

可取：

$$\xi=0, \quad \eta_{ix}=1, \quad \eta_{iy}=0, \quad \eta_{iz}=0$$

L显然为变换的不变式。此时式(12-15)成为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{x}_i=\text{常量} \qquad \text{(动量积分)}$$

例(3) 一个质点在中心力场中绕z轴转动，拉格朗日函数L

可写为:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-V(r),\quad r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

绕 z 轴旋转的变换式为:

$$\bar{t}=t,\quad \bar{x}=x\cos\epsilon+y\sin\epsilon,$$

$$\bar{y}=-x\sin\epsilon+y\cos\epsilon,\quad \bar{z}=z$$

因

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2=(x\cos\epsilon+y\sin\epsilon)^2+(-x\sin\epsilon+y\cos\epsilon)^2=$$

$$=x^2+y^2$$

和

$$\dot{\bar{x}}^2+\dot{\bar{y}}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$$

所以 $\bar{L}=L$。现在因 $\xi=0$, $\eta_z=0$, 和 ϵ 是很小的转角,所以

$$\bar{x}=x+\epsilon y \quad 和 \quad \bar{y}=y-\epsilon x$$

由此可见 $\eta_x=y$, $\eta_y=-x$。于是式(2-15)成为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\eta_x+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\eta_y+\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\eta_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}y+\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(-x)=$$

$$=yp_x-xp_y=-(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})_z=常量$$

武杰诺维克(B. D. Vujanovic)和德贾凯(Dj. S. Djukie)曾把诺埃塞尔的理论推广到非保守系统的第一次积分的表示式(参 21)。

第十三章　可分解的动力学方程

§13-1　变数可以明显分离的拉格朗日方程

若一力学系统，它的动能和位能分别可表示为：

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(q_i)\dot{q}_i^2 \\ V&=\sum_{i=1}^{N}\psi_i(q_i) \end{aligned}\right\} \tag{13-1}$$

则拉格朗日方程式(4-13)成为

$$\frac{d}{dt}[\varphi_i(q_i)\dot{q}_i]-\frac{1}{2}\left[\frac{d\varphi_i(q_i)}{dq_i}\right]\dot{q}_i^2=-\frac{d\psi_i(q_i)}{dq_i}$$

$$(i=1,2,\cdots,N)$$

或

$$\varphi_i(q_i)\ddot{q}_i+\frac{1}{2}\frac{d\varphi_i(q_i)}{dq_i}\dot{q}_i^2=-\frac{d\psi_i(q_i)}{dq_i} \tag{13-2}$$

上式各变数 q_i 已经分离，于是可以分别积分。

将上式两端各乘以 $\dot{q}_i$，则得

$$\varphi_i(q_i)\ddot{q}_i\dot{q}_i+\frac{1}{2}\frac{d\varphi_i(q_i)}{dt}\dot{q}_i^2=-\frac{d\psi_i(q_i)}{dt}$$

对上式积分，得

$$\frac{1}{2}\varphi_i(q_i)\dot{q}_i^2+\psi_i(q_i)=C_i$$

由上式解出 $\dot{q}_i$，得

$$\dot{q}_i=\sqrt{\frac{2[C_i-\psi_i(q_i)]}{\varphi_i(q_i)}}$$

变数分离后再积分得

$$t=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{\varphi_i(q_i)}}{\sqrt{C_i-\psi_i(q_i)}}dq_i+\gamma_i \quad (i=1,2,\cdots,N)$$

式中 γ_1、γ_2、…、γ_n 为积分常数。

§13-2　刘维系统

1849 年刘维将上述问题推广如下：凡力学系统的动能 T 和位能 V 可以写成：

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}U\sum_{i=1}^{N}v_i(q_i)\dot{q}_i^2 \\ V&=\frac{W}{U} \end{aligned}\right\} \tag{13-3}$$

式中：

$$U=u_1(q_1)+u_2(q_2)+\cdots\cdots+u_N(q_N)$$
$$W=w_1(q_1)+w_2(q_2)+\cdots\cdots+w_N(q_N)$$

那么这个力学系统就可变数分离求解。

因令

$$\int\sqrt{v_i(q_i)}\,dq_i=q_i^* \qquad (i=1,2,\cdots,N)$$

为新变数，则有

$$\sqrt{v_i(q_i)}\,dq_i=dq_i^*$$

将上式除以 dt，再平方，得

$$v_i(q_i)\dot{q}_i^2=\dot{q}_i^{*2}$$

于是式(13-3)可以化为：

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}U^*\Sigma\dot{q}_i^{*2} \\ V&=\frac{W^*}{U^*} \end{aligned}\right\} \tag{13-4}$$

式中:

$$U=\Sigma u_i(q_i)=\Sigma u_i^*(q_i^*)=U^*$$

$$W=\Sigma W_i(q_i)=\Sigma W_i^*(q_i^*)=W^*$$

为简便起见，再将记号 * 取去，我们只要讨论:

$$\left.\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}U(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots\dot{q}_N^2)\\V&=\frac{W}{U}\end{aligned}\right\}\tag{13-5}$$

将上式代入拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

得

$$\frac{d}{dt}(U\dot{q}_i)-\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_N^2)\frac{\partial U}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

将上式乘以 $2U\dot{q}_i$，得

$$\frac{d}{dt}(U\dot{q}_i)^2-U\dot{q}_i(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_N^2)\frac{\partial U}{\partial q_i}=-2U\dot{q}_i\frac{\partial V}{\partial q_i}\tag{13-6}$$

应用能量积分

$$\frac{1}{2}U\Sigma\dot{q}_i^2+V=h$$

则式(13-6)可化为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(U\dot{q}_i)^2&=2\dot{q}_i(h-V)\frac{\partial U}{\partial q_i}-2U\dot{q}_i\frac{\partial V}{\partial q_i}=\\&=2\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}[(h-V)U]=\\&=2\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}[hu_i(q_i)-w_i(q_i)]=\\&=2\frac{d}{dt}[hu_i(q_i)-w_i(q_i)]\end{aligned}$$

积分上式，得

$$\frac{1}{2}(U\dot{q}_i)^2 = hu_i(q_i) - w_i(q_i) + \gamma_i \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{13-7}$$

所以我们由上式可得变数分离式如下：

$$\frac{dq_1}{\sqrt{hu_1(q_1)-w_1(q_1)+\gamma_1}} = \frac{dq_2}{\sqrt{hu_2(q_2)-w_2(q_2)+\gamma_2}} =$$

$$= \cdots\cdots = \frac{dq_N}{\sqrt{hu_N(q_N)-w_N(q_N)+\gamma_N}} = \frac{\sqrt{2}\,dt}{U}$$

但是由于能量积分的存在，N个积分常数γ_1、γ_2、…、γ_N彼此之间尚存在一定的关系式。

对N个式(13-7)求总和，得

$$\frac{1}{2}U^2\Sigma\dot{q}_i^2 = hU - W + \Sigma\gamma_i$$

即

$$\Sigma\gamma_i = \frac{1}{2}U^2\Sigma\dot{q}_i^2 - hU + UV = U(T-h+V) = 0.$$

§ 13-3　斯塔克尔(Stäckel)定理[参3(*f*)]

斯塔克尔更将刘维系统推广到更一般的正交系统（Orthogonalsystems）——动能T只含$\dot{q}$的平方项(不出现$\dot{q}_i\dot{q}_k$的交叉项)。

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} C_i p_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i}\dot{q}_i^2 \tag{13-8}$$

式中C_i为q_1、q_2、…、q_N的C_1类函数，且$C_i \geqslant 0$。

斯塔克尔定理　N自由度的正交系统能分解成N个单积分的充分和必要条件是存在一个$N\times N$方阵(u_{rs})，它的元素u_{rs}仅是q_r的函数；又存在一个行矩阵$\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$，它的元素$w_r$仅是$q_r$的函数，并使：

$$\left.\begin{aligned} C_1u_{1s}+C_2u_{2s}+\cdots+C_Nu_{Ns}=\delta_1^s \\ C_1w_1+C_2w_2+\cdots+C_Nw_N=V \end{aligned}\right\} \qquad (s=1, 2, \cdots, N) \tag{13-9}$$

式(13-9)的第一式可以写成矩阵式

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & \cdots & u_{N1} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & \cdots & u_{N2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{1N} & u_{2N} & u_{3N} & \cdots & u_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13-10}$$

证: 设 v 矩阵是上式 u 矩阵的逆矩阵，则上式左边乘以 v 后，得

$$vuC=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{N1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{N2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1N} & v_{2N} & \cdots & v_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1N} \end{pmatrix}$$

因 $vu=E$——单位矩阵，所以由上式可得

$$C_i=v_{1i} \tag{13-11}$$

因此，式(13-9)的第二式又可写成

$$V=v_{11}w_1+v_{12}w_2+\cdots+v_{1N}w_N \tag{13-12}$$

T 为式(13-8)的正交系统的哈密顿—雅科毕方程，按式(7-12b)和(7-22)可写为

$$\frac{1}{2}\left[C_1\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)^2+C_2\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}\right)^2+\cdots+C_N\left(\frac{\partial S}{\partial q_N}\right)^2\right]+V=\alpha_1 \tag{13-13}$$

设上式有一个完全积分(Complete integral)如下式:

$$S=S_1+S_2+S_3+\cdots+S_N \tag{13-14}$$

式中

$$S_r=S_r(q_r, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$$

将式(13-14)代入式(13-13)，必定成为各 q 和各 α 的恒等式。

所以把它代入后的式(13-13)对各α取偏导数，得：

$$\left.\begin{aligned}
&C_1\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_1\alpha q_1}+C_2\frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_1\partial q_2}+\cdots+C_N\frac{\partial S}{\partial q_N}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_1\partial q_N}=1\\
&C_1\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_2\partial q_1}+C_2\frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_2\partial q_2}+\cdots+C_N\frac{\partial S}{\partial q_N}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_2\partial q_N}=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_1\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_N\partial q_1}+C_2\frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_N\partial q_2}+\cdots+C_N\frac{\partial S}{\partial q_N}\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_N\partial q_N}=0
\end{aligned}\right\}\tag{13-15}$$

上式C_1、C_2、…、C_N的系数行列式为

$$\Delta=\frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{\partial S}{\partial q_2}\cdots\frac{\partial S}{\partial q_N}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha_r\partial q_s}\right|$$

由于S的形式为式(13-14)，它是式(13-13)的完全积分，按照完全积分的数学特性，必有$\Delta\neq0$。于是我们可选出一组值α_1、α_2、…、α_N，使$\Delta\neq0$。这时式(13-15)成为下列方程组的形式：

$$\sum_{r=1}^{N}C_r u_{r1}=1$$

$$\sum_{r=1}^{N}C_r u_{rs}=0\qquad(s=2,3,\cdots,n)$$

并且$|u_{rs}|\neq0$，上式就是式(13-9)的第一式。

又由式(13-13)，有

$$V=\alpha_1-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}C_r\left(\frac{\partial S}{\partial q_r}\right)^2=\sum_{r=1}^{N}C_r\left[\alpha_1 u_{r1}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_r}{\partial q_r}\right)^2\right]$$

上式括号中仅是q_r的函数，所以V的形式成为$\sum_{r=1}^{N}C_r w_r$。这样我们已证明式(13-9)是可变数分离的必要条件。

现在证明条件式(13-9)也是充分的。

假定式(13-9)已经成立。按$H=h$的哈密顿—雅科毕方程由

式(13-13)表示。应用式(13-9)，则式(13-13)可写为

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}C_r\left(\frac{\partial S}{\partial q_r}\right)^2+\sum_{r=1}^{N}C_r w_r=\alpha_1\left(\sum_{r=1}^{N}C_r u_{r1}\right)+$$
$$+\alpha_2\left(\sum_{r=1}^{N}C_r u_{r2}\right)+\cdots+\alpha_N\left(\sum_{r=1}^{N}C_r u_{rN}\right)$$

式中 α_2、α_3、$\cdots$、α_N 为任意常数。将上式改写为

$$\sum_{r=1}^{N}C_r\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q_r}\right)^2-(\alpha_1 u_{r1}+\alpha_2 u_{r2}+\cdots+\alpha_N u_{rN}-w_r)\right]=0$$

由上式可见，$S_1+S_2+\cdots+S_N$ 是一个完全积分，其中

$$\left(\frac{dS_r}{dq_r}\right)^2=2(\alpha_1 u_{r1}+\alpha_2 u_{r2}+\cdots+\alpha_N u_{rN}-w_r)$$

上式右边仅是 q_r 的函数，可以表示为 $f_r(q_r)$，而 α_1、α_2、$\cdots$、α_N 在 $f_r(q_r)$ 中是以线性形式出现的。所以变数已经完全分离。将上式积分，得

$$S_r=\int\sqrt{f_r(q_r)}\,dq_r$$

应用上式和式(7-9)的第二式，得

$$t+\beta_1=\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial S_r}{\partial \alpha_1}=\sum_{r=1}^{N}\int\frac{u_{r1}dq_r}{\sqrt{f_r(q_r)}} \tag{13-16}$$

$$\beta_s=\frac{\partial S}{\partial \alpha_s}=\sum_{r=1}^{N}\int\frac{u_{rs}dq_r}{\sqrt{f_r(q_r)}} \tag{13-17}$$

和

$$p_s=\frac{\partial S}{\partial q_s}=\sqrt{f_s(q_s)} \tag{13-18}$$

式(13-17)给出代表点在 N 维 q 空间的轨迹方程，式(13-16)和(13-17) 给出代表点在 q 空间的运动方程。以上三式一起给出 $2N$ 维相空间运动方程。

附　　录

附录 1. 伐夫型微分方程的可积条件

一般分析力学中提出的运动约束大多是一阶微分方程

$$\sum_{i=1}^{N} a_i dq_i + a_t dt = 0 \tag{1}$$

式中 a_i 和 a_t 都是 q、t 的函数。微分方程(1)的型式在数学上称为伐夫型微分方程。

由于给定的 a_i、a_t 的内容而使微分方程(1)为可积的，或不可积的。如果式 (1) 为可积，那么各 a_i 和 a_t 之间一定要满足一些条件。

所谓式(1)为可积的，一定能找到一个函数

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_N; t) = C \tag{2}$$

它的全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_N} dq_N + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \tag{3}$$

正好就是式(1)，或有个积分因子的差别。

若式(3)正好就是式(1)，那么：

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} = a_i, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = a_t \tag{4}$$

应用数学恒等式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial a_j \partial a_i} \tag{5}$$

得:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial a_i}{\partial q_j}=\frac{\partial a_j}{\partial q_i}\\ \frac{\partial a_i}{\partial t}=\frac{\partial a_t}{\partial q_i}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

上式就是式(1)的可积条件。

对于有一个积分因子的区别，我们用三个变量的伐夫微分方程为例，加以说明：

$$X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz=0 \tag{7}$$

如果上式有一积分

$$f(x,y,z)=C$$

那么

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0 \tag{8}$$

式(8)与(7)的区别在于一个积分因子 $\mu(x,y,z)$，则：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}=\mu X\\ \frac{\partial f}{\partial y}=\mu Y\\ \frac{\partial f}{\partial z}=\mu Z\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

应用数学恒等式(5)，有：

$$\mu\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial y}X=\mu\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial x}Y$$

$$\mu\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial \mu}{\partial z}Y=\mu\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial \mu}{\partial y}Z$$

$$\mu\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial x}Z=\mu\frac{\partial X}{\partial z}+\frac{\partial \mu}{\partial z}X$$

要 μ 同时适合上列三个方程，除非 X、Y、Z 先满足一种条件。用 Z、X、Y 顺次乘上面三个方程，然后三式相加，约去非零因子 μ，得

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0$$

或写为

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=0$$

上式就是式(7)具有积分因子情况下的求积条件。我们要对式(1)求积分，必须先验证是否满足求积条件，条件满足后，然后设法求出式(1)的全微分。

附录 2. $d\delta x=\delta dx$

以质点作直线运动为例来加以说明[参 12(c)]。设质点的运动方程为

$$\ddot{x}=\phi(t,x)$$

它的解案可表示为

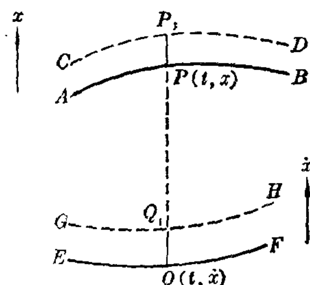
$$x=F(t,\alpha_1,\alpha_2) \qquad (1)$$

式中 α_1、α_2 为积分常数。

由式(1)得

$$\dot{x}=\frac{\partial F}{\partial t}\equiv G(t,\alpha_1,\alpha_2) \qquad (2)$$

我们可以把积分常数 α_1、α_2 与 $t=0$ 时的 $x=x_0$, $\dot{x}_0=(\dot{x})_0$ 联系起来。



附图-1

式(1)和(2)表示以 α_1、α_2 为参数的两簇曲线。在下面附图-1中，以 AB 曲线表示 α_1、α_2 取某一定值的 $F(t,\alpha_1,\alpha_2)=x$ 的曲线；EF 曲线表示对于相一致的 α_1、α_2 定值的 $\dot{x}=G(t,\alpha_1,\alpha_2)$。

设参数 α_1、α_2 有微小变化：$\alpha_1+\delta\alpha_1$, $\alpha_2+\delta\alpha_2$, 这时 AB、EF 曲线分别变成 CD 和 GH。在 t 时 AB 上的 P 点成为 CD 上的 P_1 点（此时时间 t 不变），这是由于变分 $\delta\alpha_1$ 和 $\delta\alpha_2$ 产生了位移 $\overrightarrow{PP_1}$。令 P 的坐标为 x, P_1 的坐标为 $x+\delta x$, 那么 δx 是 $\delta\alpha_1$ 和 $\delta\alpha_2$ 的函数，

而为

$$\delta x=\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 \tag{3}$$

同样在 t 时，EF 上的 Q 点，由于 $\delta\alpha_1$ 和 $\delta\alpha_2$，发生位移 $\overrightarrow{QQ_1}$，设 Q 的坐标为 $\dot{x}$，Q_1 的坐标为 $\dot{x}+\delta\dot{x}$，则有

$$\delta\dot{x}=\frac{\partial G}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{\partial G}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 \tag{4}$$

或

$$\delta\dot{x}=\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1\partial t}\delta\alpha_1+\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2\partial t}\delta\alpha_2 \tag{5}$$

将式(3)对时间 t 取导数，则有

$$\frac{d}{dt}\delta x=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \alpha_1}\delta\alpha_1+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \alpha_2}\delta\alpha_2$$

将上式与式(5)比较，得

$$\frac{d}{dt}(\delta x)=\delta\dot{x}=\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

如果将 δ 和 d 看成算符，那么由上式可得

$$d(\delta x)=\delta(dx) \quad \text{或} \quad d\delta=\delta d$$

附录 3. 质点自静止开始运动的方向与合力的方向一致

质点初位置为 $\boldsymbol{r}_0$，初速度 $\boldsymbol{v}_0=0$，此时作用在质点上的力为平衡力系，可以放置不理。一旦平衡破坏，即质点上开始作用着合力 $\boldsymbol{R}$，此时质点自静止开始运动。在力的作用时间相当短的情况下，质点的位置 $\boldsymbol{r}$ 可用时间 t 的幂级数表示[参 9(c)]为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2+\cdots$$

因 t 自质点从静止开始运动时算起，所以 $\boldsymbol{v}_0=0$。又因 t 不大，可

以略去高次项，故得

$$\delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2=\frac{t^2}{2m}\boldsymbol{R}$$

所以起始的 $\delta\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 方向一致。

现在再来讨论两个质点用质量可略的刚杆连接的例 1-2。如图 1-13所示。我们在第一章中已经证明

$$\boldsymbol{N}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{N}_2\cdot d\boldsymbol{r}_2=0$$

所以，如果 $\boldsymbol{N}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1>0$，则必有 $\boldsymbol{N}_2\cdot d\boldsymbol{r}_2<0$。那么如何能保证质点系每一个质点都有 $\boldsymbol{R}_i\cdot d\boldsymbol{r}_i>0$呢？这个问题就在于主动力和约束力的差别了。如果原来这两个质点是静止的，那么单凭这两个约束力是不会产生运动的，除非把刚杆用弹簧来代替，使两个质点可以产生相对运动。

要例 1-2 的两个质点产生运动，至少必须有一个质点有主动力作用。设质点 m_2 在 t 时受主动力 $\boldsymbol{P}_2$ 作用，则由于刚杆的约束，立刻产生一对约束力 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{N}_2$。此时质点 m_2 在 dt 时间内产生位移 $d\boldsymbol{r}_2$，沿 $\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{N}_2$ 的方向。质点 m_1 受 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{N}_1$ 作用，产生位移 $d\boldsymbol{r}_1$，沿 $\boldsymbol{N}_1$ 方向，$\boldsymbol{R}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{R}_2\cdot d\boldsymbol{r}_2$ 两者都>0。

由上可见，一个刚体如果原为静止，那么必须在刚体上有一点有主动力作用，刚体才会产生运动。

附录 4. $\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$

我们可以形式地应用大家熟知的矢量公式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

也可以用矢量分析如实运算导出如下：

$$\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})\times\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]=$$

$$=\left[v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-v_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]i+[\quad]j+[\quad]k=$$

$$=\left[v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}-\left(v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x\right]i+[\quad]j+[\quad]k=$$

$$=\left[v_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}-\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x\right]i+\cdots=$$

$$=\left[\ \boldsymbol{v}\cdot\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)A_x\boldsymbol{i}\ \right]+\cdots=$$

$$=\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$ [注意 $\nabla\boldsymbol{A}$ 为并矢式(Dyadic)]

将 $\boldsymbol{v}$ 看作常矢量，则

$$\boldsymbol{v}\cdot(\nabla\boldsymbol{A})=\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})$$

于是

$$\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$$

附录 5. 平面相空间的奇点类型

现在讨论由下列微分方程组所表示的自治系统[参 18]

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=X(x,y)\\\frac{dy}{dt}&=Y(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中 $X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 都是 x、y 的多项式。上两式消去 $d\tau$ 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y(x,y)}{X(x,y)}\tag{2}$$

xy 平面称为变数 x 和 y 的态平面 (State plane)。当有关系式 $\frac{dx}{d\tau}=y$ 时，这态平面就成为相平面。求解式(2)，得到了它的积分曲线，那么式(1)的 $x(\tau)$、$y(\tau)$ 就容易求得，式(2)的积分曲线就是代表点在相平面中的轨迹。

相平面中一切使 X、Y 不同时为零的点 (x,y) 称为常点 (Ordinary point)，使 $X(x_0,y_0)=Y(x_0,y_0)=0$ 的点 (x_0,y_0) 称为奇点，

奇点的力学意义为它表示平衡点，因为由式(1)可知 $x(\tau)$ 和 $y(\tau)$ 为常数。

设X、Y用泰勒级数展开，并将式(1)写成：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau}&=a_1x+a_2y+X_2(x,y)\\ \frac{dy}{d\tau}&=b_1x+b_2y+Y_2(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中 X_2、Y_2 是高于一次的 x,y 的多项式。因式(3)当 $x=0$、$y=0$ 时右边为零，所以式(3)的原点是个奇点。我们现在只着重讨论代表点仍在原点附近的情况，于是我们首先要研究下列的线性方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau}&=a_1x+a_2y\\ \frac{dy}{d\tau}&=b_1x+b_2y\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

消去 τ 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b_1x+b_2y}{a_1x+a_2y}\tag{5}$$

令：

$$\left.\begin{aligned}x&=Ae^{\lambda\tau}\\ y&=Be^{\lambda\tau}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

将式(6)代入式(4)，得：

$$\left.\begin{aligned}(a_1-\lambda)A+a_2B&=0\\ b_1A+(b_2-\lambda)B&=0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

要式(7)有 A、B 不为零的解，必须

$$\begin{vmatrix}a_1-\lambda & a_2\\ b_1 & b_2-\lambda\end{vmatrix}=0\tag{8}$$

解 λ 的二次方程式(8)，得两个根：

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[a_1+b_2\pm\sqrt{(a_1-b_2)^2+4a_2b_1}\right]\tag{9}$$

我们首先考虑 λ_1、λ_2 都不等于零，而且两者不相等，比值$\frac{B_i}{A_i}$可由式(7)求得为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{B_1}{A_1}=\frac{a_1-\lambda_1}{-a_2}=\frac{-b_1}{b_2-\lambda_1}\\ \frac{B_2}{A_2}=\frac{a_1-\lambda_2}{-a_2}=\frac{-b_1}{b_2-\lambda_2}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式(4)的通解可写为：

$$\left.\begin{aligned}x=A_1e^{\lambda_1\tau}+A_2e^{\lambda_2\tau}\\ y=B_1e^{\lambda_1\tau}+B_2e^{\lambda_2\tau}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

因比值 B/A 是由式 (10) 确定了，所以式 (11) 中包含两个任意常数。

庞伽雷按照奇点附近的积分曲线的特性将奇点分类，即按照特征根 λ 的性质分类如下：

(1) 奇点是个结点(Nodal point)，当 λ_1、λ_2 都是实根而且同号，即有$(a_1-b_2)^2+4a_2b_1\geqslant 0$ 和 $a_1b_2-a_2b_1>0$

(2) 奇点是个鞍点，当 λ_1、λ_2 都是实根，但符号相反，即

$$(a_1-b_2)^2+4a_2b_1>0 \quad 和 \quad a_1b_2-a_2b_1<0$$

(3) 奇点是个焦点 (Focal point) [或称螺旋点(Spiral point)]，如果 λ_1、λ_2 是一对共轭复根，即

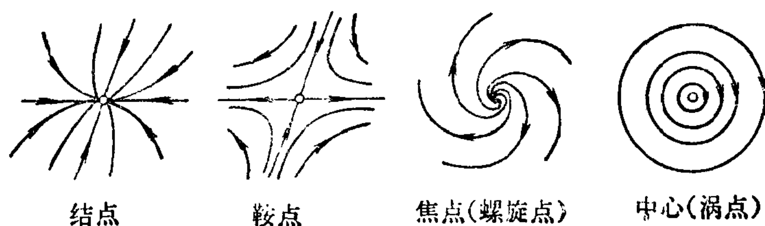
$$(a_1-b_2)^2+4a_2b_1<0$$

(4) 奇点是个中心(Center) [或称涡点(Vortex point)]，或者是个焦点，当 λ_1、λ_2 是两个虚根，即

$$(a_1-b_2)^2+4a_2b_1<0 \quad 和 \quad a_1+b_2=0$$

这四个类型的奇点如附图-2 所示。

[对这些奇点类型的详细讨论可参看秦元勋编《微分方程所定义的积分曲线》，(上册)，科学出版社。]



附图-2

附录 6. 刚体一般运动的动能表示式

设刚体的瞬时角速度为 ω，则刚体上任一点的速度可写为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=v_0^2+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

刚体的总动能为

$$T=\frac{1}{2}\int v^2dm=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}\int(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})dm+$$

$$+\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\omega}\times\int\boldsymbol{r}dm$$

选动坐标的原点 O 与刚体的质心 C 重合，此时

$$\int\boldsymbol{r}dm=M\boldsymbol{r}_C=0$$

所以上式留下两项，第一项表示刚体的平动动能，$v_O=v_C$ 就是刚体的质心的速度；第二项表示刚体绕质心 C 的转动动能。因

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=$$

$$=(\omega_yz-\omega_zy)\boldsymbol{i}+(\omega_zx-\omega_xz)\boldsymbol{j}+(\omega_xy-\omega_yx)\boldsymbol{k}$$

所以

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=(\omega_yz-\omega_zy)^2+$$

$$+(\omega_zx-\omega_xz)^2+(\omega_xy-\omega_yx)^2=$$

$$=\omega_x^2(y^2+z^2)+\omega_y^2(x^2+z^2)+\omega_z^2(x^2+y^2)-$$

$$-2\omega_x\omega_z xz-2\omega_y\omega_z yz-2\omega_x\omega_y xy$$

于是刚体的转动动能为

$$T_{rot}=\frac{1}{2}[\omega_x^2 A+\omega_y^2 B+\omega_z^2 C-$$

$$-2\omega_y\omega_z D-2\omega_z\omega_x E-2\omega_x\omega_y F]$$

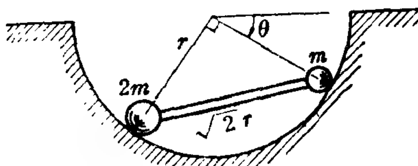
其中 A、B、C、D、E、F 由式 (2-41) 所定义。对于惯性主轴坐标系 $O\xi\eta\zeta$，因 $D=E=F=0$，上式成为

$$T_{rot}=\frac{1}{2}[A\omega_\xi^2+B\omega_\eta^2+C\omega_\zeta^2]$$

习　题

一　虚位移原理、平衡的稳定性

1-1　质量为m和$2m$的两个质点，用质量可略的细刚杆连接，放在半径为r的光滑球形碗内，如图所示。试用θ的虚位移$\delta\theta$求出θ在平衡位置的值。



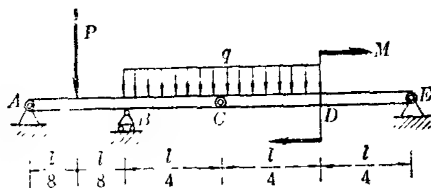
题 1-1 图

答：$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2}$

1-2　一均质直刚杆，它的两端用长为l的绳连接，将绳悬挂在固定于墙上的钉上，试求其平衡位置，并讨论其稳定性。

答：不稳

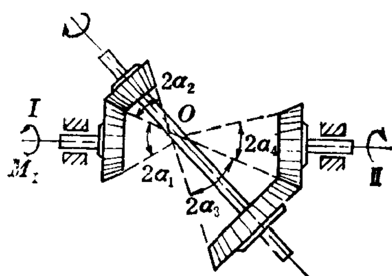
1-3　一组合梁由铰链C连接梁AC和CE而成，载荷分布如图所示。已知跨度$l=8\mathrm{m}$，$P=500\mathrm{kg}$，均布力$q=250\mathrm{kg/m}$，力偶矩$M=500\mathrm{kg\cdot m}$，试用虚位移原理求出支座B的反力。



题 1-3 图

答：$N_B=1500\mathrm{kg}$

1-4　减速器由具有公共锥顶的四个圆锥轮所组成，其顶角分别为$2\alpha_1$、$2\alpha_2$、$2\alpha_3$和$2\alpha_4$，如图所示。主动轴I上作用有转矩M_I，试求传给轴II上的力矩M_{II}，不计摩擦。

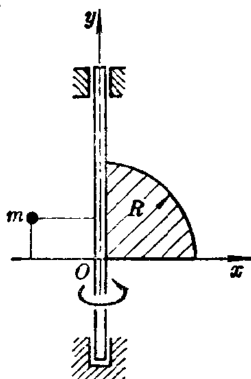


题 1-4 图

答：$M_{II}=M_I\dfrac{\sin\alpha_2\sin\alpha_4}{\sin\alpha_1\sin\alpha_3}$

二　达朗伯原理

2-1　匀质扇形薄板质量为M，扇形的半径为R，中心角为90°，如图所示。薄板以匀角速度绕铅直轴转动，试问为使轴承上不产生附加动压力，则应在何处附加一个质量m？



题 2-1 图

答：$x=-\dfrac{4RM}{3\pi m}$, $y=\dfrac{3}{8}R$

三　动力学普遍方程

3-1　对于例 3-2，考虑各轮质量，设第i轮的转动惯量为J_i，试求重物的加速度。

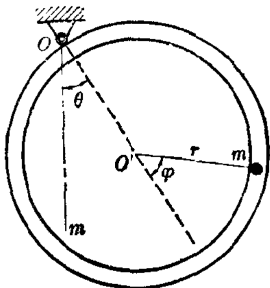
3-2　对于例 2-11，试用动力学普遍方程求解。

3-3　一半径为a的小圆柱体，在半径为b的大圆柱筒内无滑动地滚动，试求其微振动的周期。

四　拉格朗日第二类方程

4-1　试用拉格朗日方程求解习题 3-1、3-2、3-3。

4-2　一质量为m的细管弯成半径为r的圆环，圆环可绕其边缘上一固定点在其平面内摆动，管内放一质量为m的质点任其滑动，如图所示。略去摩擦不计，试求其运动微分方程。



题 4-2 图

答：

$$mr^2[2\ddot{\theta}(2+\cos\varphi)+\ddot{\varphi}(1+\cos\varphi)-\dot{\varphi}(2\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi]+$$
$$+mgr[2\sin\theta+\sin(\theta+\varphi)]=0$$
$$mr^2[\ddot{\varphi}+\ddot{\theta}(1+\cos\varphi)+\dot{\theta}^2\sin\varphi]+mgr\sin(\theta+\varphi)=$$
$$=0$$

五　哈密顿—雅科毕方程

5-1　试用哈密顿—雅科毕方程求解地面的抛物运动问题。

5-2　试用哈密顿—雅科毕方程求解弹簧振子，它的动能$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$，位能$V=\frac{1}{2}kx^2$。

六　阿佩尔方程

6-1　试用阿佩尔加速度能量方程求解习题 3-1、3-2。

6-2　试用阿佩尔方程推导习题 3-3、4-2 的运动微分方程。

七　高斯最小约束原理

7-1　试用最小约束原理求解习题 3-1、3-2。

7-2　试用最小约束原理推导习题 3-3、4-2 的运动微分方程。

8-1　试用习题 4-2 的能量积分将其运动微分方程降阶一次。

八　惠特克方程

参 考 书

[1] Л. Б. 列文松,《机械原理》,高等教育出版社,1958年。

[2] W. D. MacMillan, "Statics and the Dynamics of a Particle", McGraw-Hill, 1927, (a)p. 137—143, (b)p. 373—375, (c)p. 310—314.

[3] L. A. Pars, "A Treatise on Analytical Dynamics", William Heinemann, 1965, (a)p. 38—39, (b) p. 37—38, (c) p. 123—139, (d) p. 369—372, (e)p. 40—44, (f)p. 320—324.

[4] Y. Rocard, "General Dynamics of Vibration", Ckosby Lockwood & Son, Ltd, 1690, p. 123—128.

[5] H. H. 蒲赫哥尔茨,《理论力学基本教程》,钱尚武、钱敏译,商务印书馆,1954年,(a)66—72页。

[6] W. T. Thomson, "Introduction to Space Dynamics", John-Wiley & Sons, Inc, 1961, (a)p. 109, (b)p. 149—154.

[7] A. C. Компанееч, "Теоретическая Физика", Государственное издательство Технико-теоретической литературы, 1957, p. 111—113.

[8] G. Joos, "Theoretical Physics", Hafner Pub Co, 1950, p. 576—577.

[9] E. T. Whittaker, "A treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies", Cambridge University Press, 1937, (a)p. 406—411, (b)p. 339—356, (c)p. 45.

[10] Ф. Р. Гантмахер, "Лекчии по Аналитической Механике", Государственное Издательство Физико Матеоматической литературы, 1960, (a)p. 28—30, (b)p. 67—76.

[11] W. D. MacMillan, "Dynamics of Rigid Bodies", McGraw-Hill, 1936, (a)p. 331—346, (b)p. 329—331, (c)p. 320—322.

[12] W. M. SMart, "Celestial Mechanics", Longmans green, 1953, (a) p. 143—148, (b) p. 136—142, (c)p. 119—120.

[13] H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison-Wesley

Publishing Company, 1922.

[14] S. W. McCuskey, An "Introduction to Advanced Dynamics", Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 1959, p. 220—221.

[15] 郭敦仁,《数学物理方法》, 人民教育出版社, 1965 年, 253—288 页。

[16] 易照华,《天体力学引论》, 科学出版社, 1978 年, 213 页。

[17] Donald T. Green, wood, "Classical Dynamics", Prentice-Hall. Inc, 1977, p. 262—268.

[18] Chihiro Hayashi, "Nonlinear Oscillations in Physical Systems", McGraw-Hill Inc, 1964, p. 33—40.

[19] Yusuke Hagihara, "Celestial Mechanics, "Vol. IV, Part I, 1975, p. 7—17.

[20] F. W. Byron and R. W. Fuller, "Mathematics of Classical and Quantum Physics" Vol. I, Addison-Wesley, Publishing Company Inc, 1969, p. 72—80.

[21] Dj Djukić and Vujanovic, "Noether theory in Classical Mechanics", Acta Meh 23, 1975, p. 17—27.

索　　引

绪　　论

第　一　章

第 二 章

第 三 章

第 四 章

第 五 章

第 六 章

第 七 章

第 八 章

第 九 章

第 十 章

第十一章

第十二章

第十三章

附 录